В. Н. Литвиненко
Г. К. Безрукова

ГЕОМЕТРИЯ

7–11

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МНЕМОЗИНА

Предисловие

В настоящем пособии собраны и систематизированы наиболее важные определения, теоремы, формулы, входящие в программу курса «Геометрия 7—11», а также алгоритмы решения типовых задач на построение. Эта книга предназначена для учащихся средней общеобразовательной школы. Она может быть использована и в повседневной работе для организации повторения при подготовке к различным зачетным мероприятиям, в частности, при подготовке к экзаменам в вуз.

Порядок следования учебного материала в пособии, естественно, не совпадает с порядком его изложения в различных школьных учебниках. Так, здесь излагаются сведения о построении сечений методом следов одновременно и пирамид, и призм. Такое изложение более компактно и наглядно.

Некоторые материалы включены в справочник, хотя они есть не во всех стабильных школьных учебниках, например сведения о таких телах, как доля (доля цилиндра, конуса и шара).

Значительное место уделяется в справочнике векторно-координатному методу решения задач. В частности, приводятся примеры решения этим методом задач на построение сечений многогранников.

На выборе материала для справочника, вполне понятно, сказались предпочтения авторов-составителей. Например, в учебной литературе приводятся различные определения скрещивающихся прямых.

- Скрещивающимися прямыми называются такие две прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости (А. В. Погорелов «Геометрия, 7—11»).
- Скрещивающимися прямыми называются такие две прямые, которые не лежат в одной плоскости (Л. С. Атанасян и др. «Геометрия, 10—11»).
- Скрещивающимися прямыми называются такие две прямые, которые не параллельны и не пересекаются (В. Н. Литвиненко «Геометрия – 10»).

Авторы отдали предпочтение третьему определению.

По поводу целесообразности включения в справочник различных формулировок, определений и т. п. во всех неочевидных ситуациях авторы советовались с опытными учителями-методистами. Например, при выборе способа изложения справочного материала о параллельных прямых большинство учителей согласились с тем, что наиболее целесообразно вопрос о числе прямых, проходящих через данную точку параллельно данной прямой, изложить в следующем порядке:

1. Определение параллельных прямых;

2. Аксиома о параллельных прямых (V постулат в форме Плейфера);

3. Теорема о существовании прямой, проходящей через данную точку, параллельно данной прямой;

4. Теорема о единственности прямой, проходящей через данную точку, параллельно данной прямой.

Аналогично решался и вопрос о выборе способов построения сечения многогранника плоскостью, проходящей через три данные точки. Учителя согласились с тем, что в справочник необходимо поместить материалы о построении сечения многогранника и векторно-координатным способом, но «утяжелять» справочник информацией о движениях не следует.

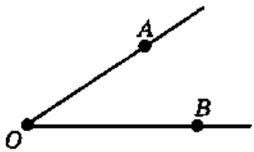
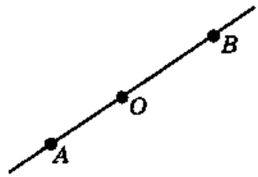
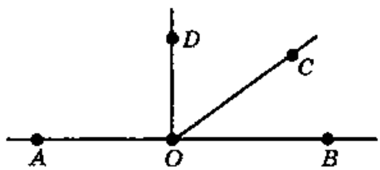
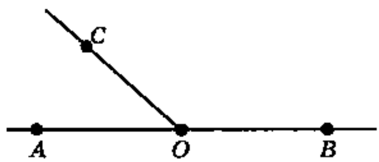
Уровень строгости приводимых здесь сведений продиктован тем, что пособие адресовано учащимся средней *общеобразовательной* школы. Поэтому в него, например, включены материалы о расстоянии между двумя точками, о расстоянии от точки до прямой, до плоскости, между двумя скрещивающимися прямыми. На этом тема «Расстояние между фигурами» исчерпывается.

Для большего удобства при работе со справочником в его конце напоминается перечень рассмотренных тем и приводится предметный указатель.

Авторы

ПЛАНИМЕТРИЯ

1. УГЛЫ

Углом называется фигура, образованная двумя лучами (***сторонами*** угла), выходящими из одной точки (***вершины*** угла).	 $\angle AOB$, лучи OA и OB — стороны угла AOB.
Развернутым углом называется угол, стороны которого являются дополнительными полупрямыми. ***Прямым*** углом называется угол, равный половине развернутого. ***Острым*** углом называется угол, который меньше прямого. ***Тупым*** углом называется угол, который больше прямого, но меньше развернутого.	 Полупрямые OA и OB являются дополнительными, значит $\angle AOB$ — развернутый угол.  $\angle COB$ — острый угол, $\angle DOB$ и $\angle DOA$ — прямые углы, $\angle AOC$ — тупой угол.
Смежными углами называются такие два угла, одна из сторон которых является общей, а две другие – дополнительными полупрямыми. Сумма смежных углов равна развернутому углу. Угол, смежный с прямым — прямой.	 $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные углы, $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$.

Градус (1°) — единица измерения углов.

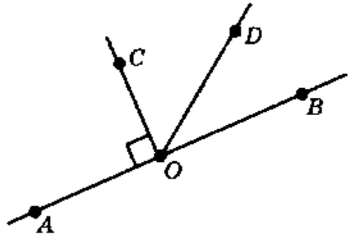
Угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла, содержит один градус (1°).

Развернутый угол содержит сто восемьдесят градусов (180°).

Прямой угол содержит 90°.

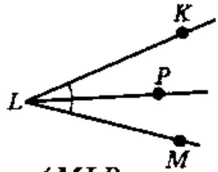
Сумма смежных углов равна 180°.

Равными называются углы, которые имеют одинаковую меру в градусах.



$\angle AOB$ — развернутый, поэтому $\angle AOB = 180°$.
$\angle AOC = 90°$ и $\angle BOC = 90°$, поэтому $\angle AOC = \angle BOC$.

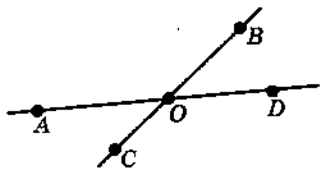
Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.



$\angle KLP = \angle MLP$,
луч LP — биссектриса $\angle MLK$.

Вертикальными углами называются такие два угла, стороны одного из которых являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

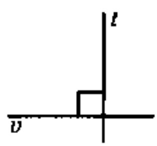
Вертикальные углы равны.

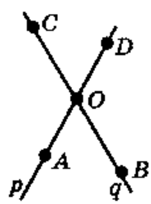


$\angle AOB$ и $\angle DOC$ — вертикальные,
$\angle AOC$ и $\angle DOB$ — вертикальные,
$\angle AOB = \angle DOC$, $\angle AOC = \angle DOB$.

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется меньший из вертикальных углов, образованных этими прямыми.

Угол между прямыми p и q
$\angle(p, q) = \angle AOB = \angle COD$.

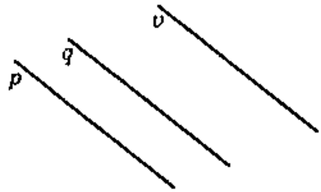
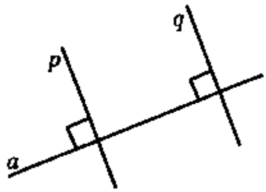
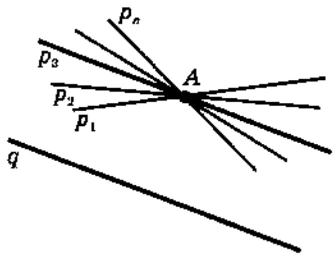
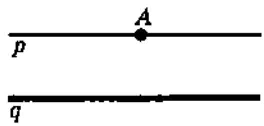




Перпендикулярными прямыми называются такие прямые, угол между которыми равен 90°.

Угол (v, t) между прямыми v и t равен 90°, то есть $v \perp t$.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Параллельными прямыми называются прямые, которые не имеют общей точки.	 $p \parallel q$, $q \parallel v$, $p \parallel v$
Теорема существования параллельных прямых Две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.	 $\left.\begin{matrix} p \perp a \\ q \perp a \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \parallel q$
Аксиома параллельных прямых Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.	 Из прямых $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, проходящих через точку A, не более чем одна параллельна прямой q.
Следствие (теоремы существования параллельных прямых и аксиомы параллельных прямых) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.	 q — данная прямая, A — данная точка, $A \notin q$; $p \parallel q$, $A \in p$; p — единственная прямая.

<table>
<tr>
<td>

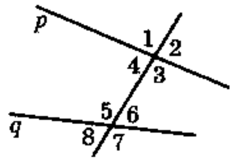
При пересечении двух прямых третьей образуются следующие пары углов:

а) ***накрест лежащие***: 3 и 5, 4 и 6 (*внутренние*), 1 и 7, 2 и 8 (*внешние*),

б) ***соответственные***: 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8;

в) ***односторонние***: 3 и 6, 4 и 5 (*внутренние*), 2 и 7, 1 и 8 (*внешние*).

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Признаки параллельности двух прямых

1. Две прямые параллельны, если при пересечении их третьей прямой образуются:

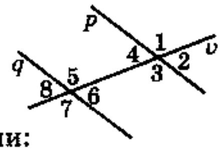
а) равные накрест лежащие углы;

б) равные соответственные углы;

в) односторонние углы, сумма которых равна 180°.

2. Две прямые параллельны, если каждая из них параллельна третьей прямой.

</td>
<td>



$p \parallel q$, если:

а) $\angle 3 = \angle 5$, или $\angle 4 = \angle 6$, или $\angle 1 = \angle 7$, или $\angle 2 = \angle 8$;

б) $\angle 2 = \angle 6$, или $\angle 3 = \angle 7$, или $\angle 1 = \angle 5$, или $\angle 4 = \angle 8$;

в) $\angle 3 + \angle 6 = 180°$, или $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, или $\angle 2 + \angle 7 = 180°$, или $\angle 1 + \angle 8 = 180°$.

$p \parallel q$, если $\begin{cases} p \parallel v, \\ q \parallel v \end{cases}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Свойства углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

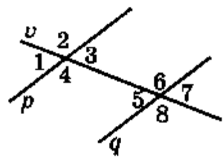
Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то:

а) накрест лежащие углы равны;

б) соответственные углы равны;

в) сумма односторонних углов равна 180°.

</td>
<td>



Если $p \parallel q$ и v — секущая прямая, то

а) $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$;

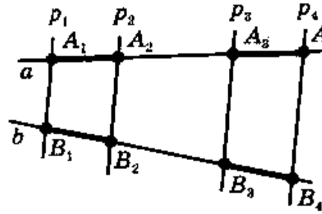
б) $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$;

в) $\angle 3 + \angle 6 = 180°$, $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, $\angle 2 + \angle 7 = 180°$, $\angle 1 + \angle 8 = 180°$.

</td>
</tr>
</table>

Теорема Фалеса

Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной из них равные отрезки, отсекают и на другой прямой равные отрезки.



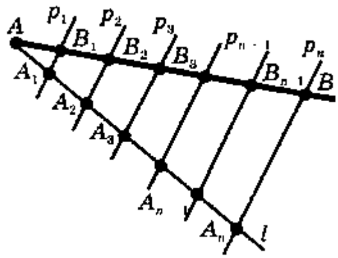
Если $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3 \parallel p_4$ и $A_1A_2 = A_3A_4$, то $B_1B_2 = B_3B_4$.

Задача. Разделить данный отрезок AB на n равных отрезков.

Решение.

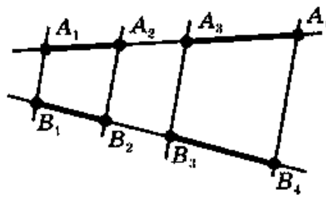
1. Проведем вспомогательный луч l с началом в точке A.
2. На луче l построим n равных отрезков $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_{n-1}A_n$.
3. Проведем прямую p_n через точки A_n и B.
4. Через точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ проведем прямые $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}$, параллельные прямой p_n.
5. Найдем точки $B_1 = p_1 \cap AB$, $B_2 = p_2 \cap AB$, $B_3 = p_3 \cap AB$, ..., $B_{n-1} = p_{n-1} \cap AB$.

По теореме Фалеса: $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B$.



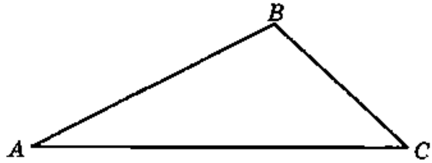
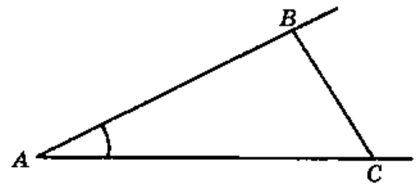
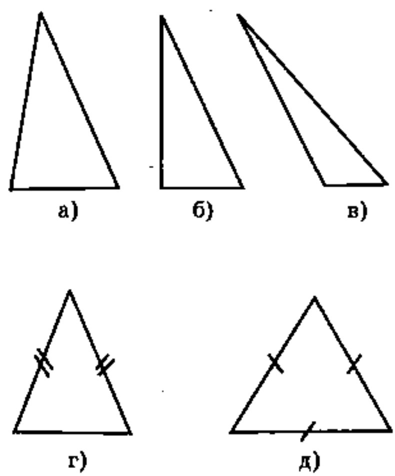
«Расширенная» теорема Фалеса

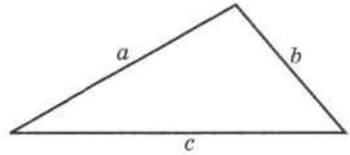
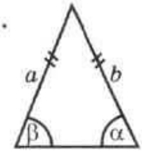
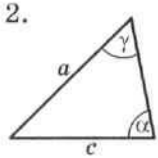
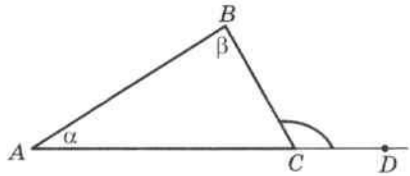
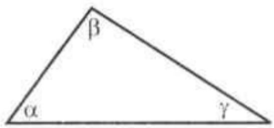
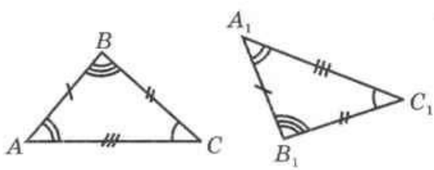
Если параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на одной из них отрезки, отношение длин которых равно k, то они отсекают и на другой прямой отрезки, отношение длин которых равно k.



Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$ и $\frac{A_1A_2}{A_3A_4} = k$, то $\frac{B_1B_2}{B_3B_4} = k$.

3. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки попарно. Указанные точки и отрезки называются соответственно ***вершинами*** и ***сторонами*** треугольника.	 ΔABC, точки A, B и C — вершины треугольника, отрезки AB, BC и AC — его стороны.
Углом треугольника называется угол, вершиной которого является вершина треугольника, а сторонами — две полупрямые, содержащие эту вершину и принадлежащие ей стороны треугольника.	 $\angle BAC$ — один из углов треугольника ABC.
Виды треугольников ***Остроугольным*** называется треугольник, все углы которого острые. ***Прямоугольным*** называется треугольник, имеющий прямой угол. ***Тупоугольным*** называется треугольник, имеющий тупой угол. ***Равнобедренным*** называется треугольник, две стороны которого равны. ***Равносторонним*** называется треугольник, у которого все стороны равны.	 а) остроугольный треугольник; б) прямоугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник; г) равнобедренный треугольник; д) равносторонний треугольник.

Во всяком треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны, а их разность – меньше третьей. ***Периметром*** треугольника называется сумма длин всех его сторон.	 $c - b < a < c + b$, $(b < c)$ $P = a + b + c$
Соотношения между сторонами и углами треугольника 1. Против равных сторон лежат равные углы и против равных углов лежат равные стороны. 2. Против большей стороны лежит больший угол и против большего угла лежит большая сторона.	1.  2.  1. Если $a = b$, то $\alpha = \beta$; если $\alpha = \beta$, то $a = b$. 2. Если $a > c$, то $\alpha > \gamma$; если $\alpha > \gamma$, то $a > c$.
Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. **Сумма углов треугольника равна 180°.**	 $\angle BCD$ — внешний угол ΔABC, $\angle BCD = \alpha + \beta$.  $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Равными называются треугольники, у которых соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны.	 $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, так как $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

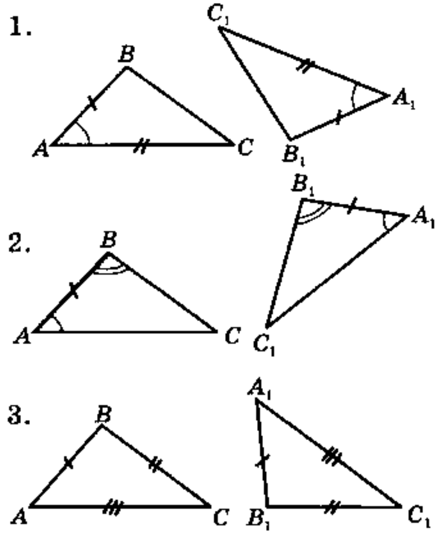
Признаки равенства треугольников

Два треугольника называются ***равными***, если у них соответственно равны:

1) две стороны и угол между ними;

2) два угла и прилежащая к ним сторона;

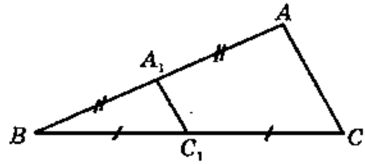
3) три стороны.



Некоторые линии в треугольнике

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

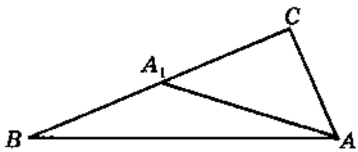
Любой треугольник имеет три средние линии.



Если $BA_1 = A_1A$ и $BC_1 = C_1C$, то A_1C_1 — средняя линия треугольника ABC.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

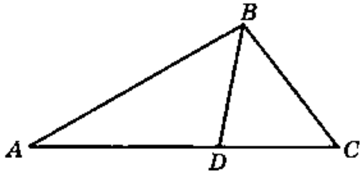
Любой треугольник имеет три медианы.



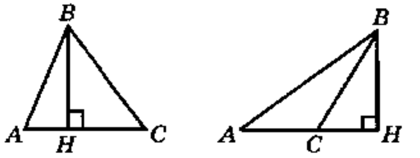
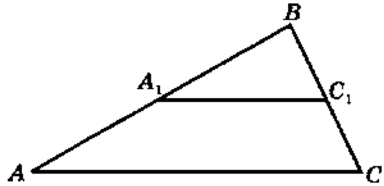
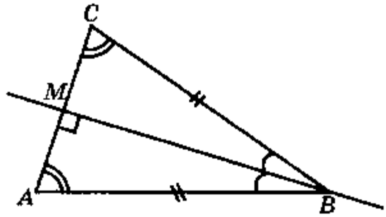
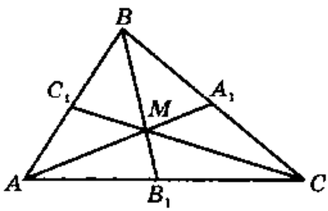
Если $BA_1 = A_1C$, то AA_1 — медиана треугольника ABC.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне.

Любой треугольник имеет три биссектрисы.

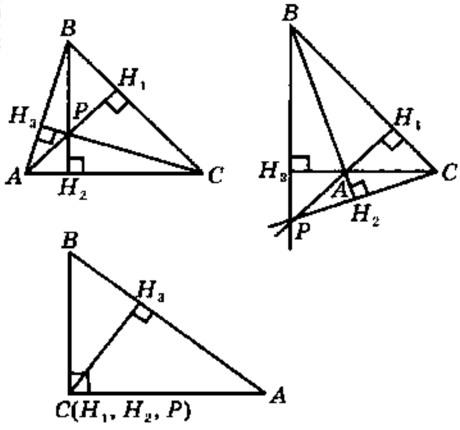


Если $\angle ABD = \angle CBD$, то BD — биссектриса треугольника ABC.

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника на прямую, содержащую его противолежащую сторону. Любой треугольник имеет три высоты.	 Если $BH \perp AC$, то BH — высота треугольника ABC.
Свойство средней линии треугольника Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине.	 Если A_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, то $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$.
В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является также его медианой и высотой, и она лежит на оси симметрии этого треугольника. В равнобедренном треугольнике углы, лежащие против равных сторон, равны.	 1. Если $AB = BC$ и BM — биссектриса треугольника ABC, то $AM = CM$, $BM \perp AC$, и прямая BM — ось симметрии треугольника ABC. 2. Если $AB = BC$, то $\angle BAC = \angle BCA$.
Четыре замечательные точки треугольника В любом треугольнике пересекаются в одной точке: 1. Три медианы. Эта точка является ***центром тяжести*** треугольника.	 Если AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, то точка M — его центр тяжести.

2. Три высоты (или продолжения трех высот).

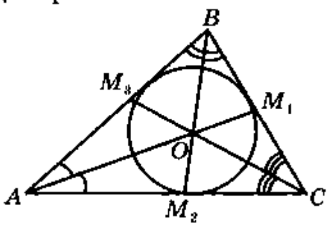
Эта точка является ***ортоцентром*** треугольника.



Если AH_1, BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC, то точка P — ортоцентр.

3. Три биссектрисы.

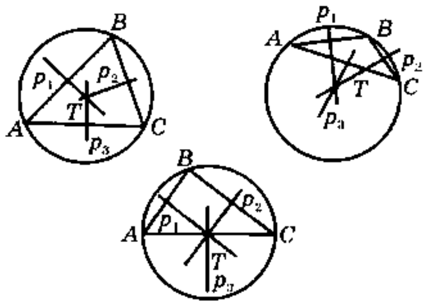
Эта точка является ***центром вписанной в треугольник окружности.***



Если AM_1, BM_2 и CM_3 — биссектрисы треугольника ABC, то точка O — центр вписанной в треугольник окружности.

4. Три прямые, проведенные через середины сторон треугольника перпендикулярно этим сторонам (*серединные перпендикуляры*).

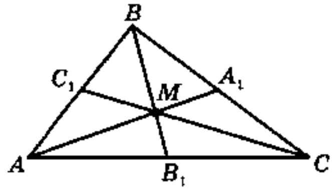
Эта точка является ***центром описанной около треугольника окружности.***



Если p_1, p_2, p_3 — серединные перпендикуляры, то точка T — центр описанной около треугольника окружности.

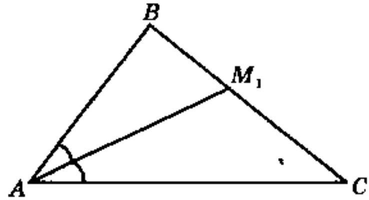
Свойство медиан треугольника

Медианы треугольника делятся точкой их пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.



Если AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC, то $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.



Если AM_1 — биссектриса треугольника ABC, то $BM_1 : CM_1 = AB : AC$.

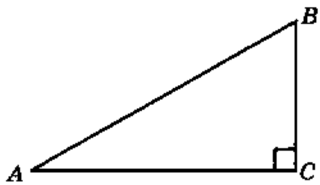
Прямоугольный треугольник

Прямоугольным называется треугольник, в котором есть прямой угол.

Гипотенузой называется сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу.

Катетами называются стороны прямоугольного треугольника, между которыми заключен прямой угол.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

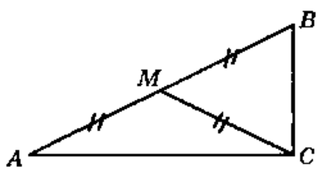


Сторона AB лежит против $\angle C = 90°$, поэтому AB — гипотенуза.

Угол между сторонами AC и BC равен 90°, поэтому AC и BC — катеты.

Свойство медианы, проведенной на гипотенузу

Медиана, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна половине гипотенузы.

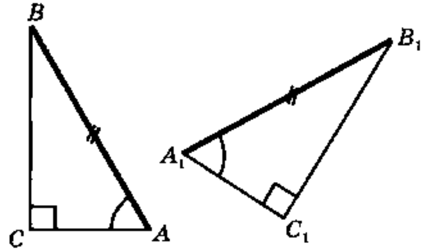


Если AB — гипотенуза треугольника ABC, а CM — медиана, проведенная на AB, то $CM = \frac{1}{2}AB$.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

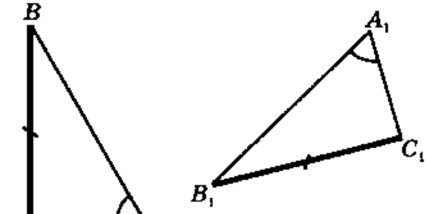
Два прямоугольных треугольника равны, если у них соответственно равны:

1) гипотенуза и острый угол;



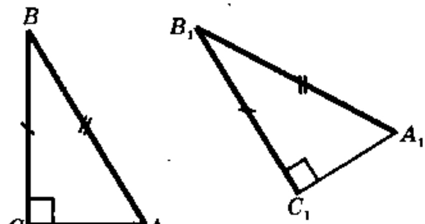
Если $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

2) катет и противолежащий ему острый угол;



Если $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

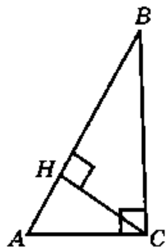
3) гипотенуза и катет.



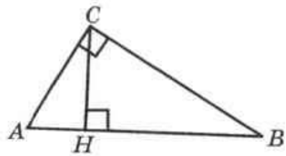
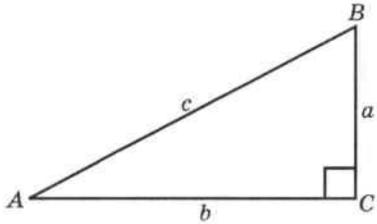
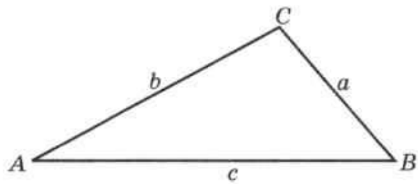
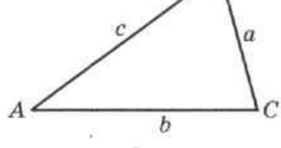
Если $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

В прямоугольном треугольнике:

1. Высота, опущенная на гипотенузу, является средним пропорциональным между отрезками, на которые она делит гипотенузу.



Если $\angle ACB = 90°$ и $CH \perp AB$, то $AH : CH = CH : BH$.

2. Каждый катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.	 Если $\angle ACB = 90°$ и $CH \perp AB$, то $AB : AC = AC : AH$ и $AB : BC = BC : BH$.
Теорема Пифагора Если треугольник — прямоугольный, то квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин его катетов. **Обратная теорема Пифагора** Если в треугольнике квадрат длины одной стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон, то этот треугольник – прямоугольный.	 Если $\angle C = 90°$, то $c^2 = a^2 + b^2$. Если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник ABC — прямоугольный.
Теорема косинусов Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.	 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. В частности, если $\angle C = 90°$, то $c^2 = a^2 + b^2$ (*теорема Пифагора*).
Теорема синусов Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.	 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Решение треугольников

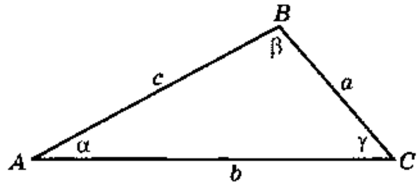
Решить треугольник — значит по известным его сторонам и углам найти неизвестные стороны и углы.

Покажем *план решения* треугольника в следующих случаях, когда известны:

1) одна его сторона и два угла;

2) две стороны и какой-нибудь угол;

3) три стороны.



В треугольнике ABC
$BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$,
$\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

Задача 1. Пусть в треугольнике ABC известна только одна сторона, например $BC = a$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$. Решить треугольник в этом случае — значит найти стороны AB и AC, а также угол A.

Решение. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle A = 180° - (\beta + \gamma)$. В треугольнике ABC по теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B},$$

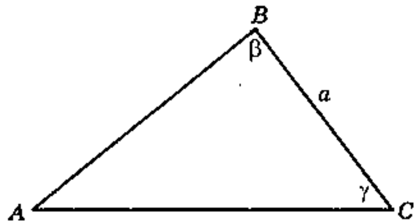
поэтому

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin \gamma}{\sin (180° - (\beta + \gamma))}$$

и

$$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin \beta}{\sin (180° - (\beta + \gamma))}.$$

Поскольку по условию $\beta + \gamma < 180°$, то задача имеет решение, и это решение *единственное*.



В треугольнике ABC
$BC = a$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

Задача 2. Пусть в треугольнике ABC известны две стороны, например $BC = a$, $AC = b$ и известен также какой-либо угол треугольника.

1. Пусть известен угол между данными сторонами, то есть $\angle C = \gamma$.

Решить треугольник в этом случае — значит найти сторону AB и углы A и B.

Решение. По теореме косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos C$, откуда $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$.

Теперь с помощью теоремы синусов:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

найдем

$$\sin A = \frac{BC \cdot \sin C}{AB} = \frac{a \sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}}$$

и

$$\sin B = \frac{AC \cdot \sin C}{AB} = \frac{b \sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}}.$$

Зная $\sin A$ и $\sin B$, легко найти углы A и B.

Ясно, что при любых значениях α, β и γ задача имеет решение, и это решение единственное.

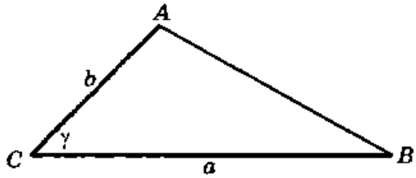
2. Пусть известен угол, противолежащий стороне AC, то есть $\angle B = \beta$.

Решение. В этом случае найдем сначала угол A, пользуясь теоремой синусов. Тогда

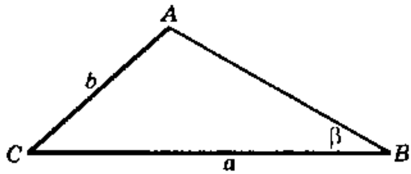
$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, $\sin A = \frac{BC \cdot \sin B}{AC} = \frac{a \sin\beta}{b}$, откуда легко найти угол A ($\angle A = \alpha$). Затем находим $\angle C = 180° - (\alpha + \beta)$, а далее

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - (\alpha + \beta))}.$$

Выясним, при какой зависимости a, b и β задача имеет решение. Для этого из точки C опустим перпендикуляр CH на луч m, проходящий через точку B под углом β к лучу BC.



1. В треугольнике ABC $BC = a$ и $AC = b$, $\angle C = \gamma$.

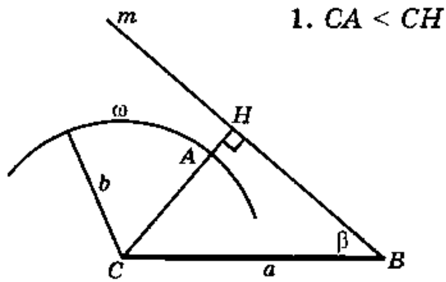


2. В треугольнике ABC $BC = a$ и $AC = b$, $\angle B = \beta$.

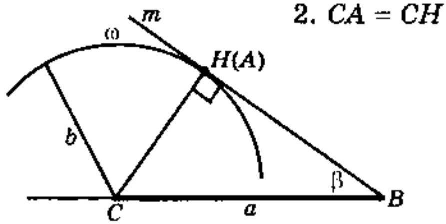
В прямоугольном треугольнике BCH: $CH = a \sin \beta$.

Рассмотрим несколько случаев:

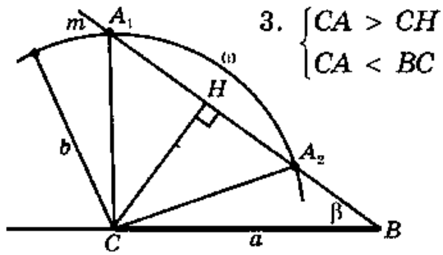
1. Если $CA < CH$, то есть $b < a \sin \beta$, то окружность ω с центром в точке C и радиусом b не пересекает прямую m, и, следовательно, треугольник ABC не существует, или, другими словами, задача решений не имеет.



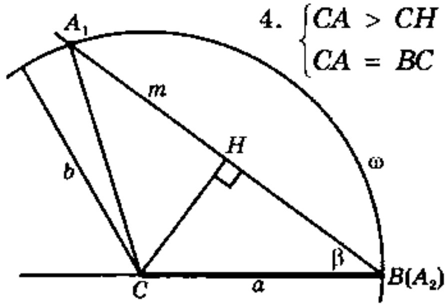
2. Если $CA = CH$, то есть $b = a \sin \beta$, то окружность ω касается луча m в точке H, то есть точка A совпадает с точкой H. Таким образом, треугольник ABC существует, его угол при вершине A — прямой. Это решение является единственным.



3. Если $CA > CH$, но $CA < BC$, то есть $b > a \sin \beta$, но $b < a$, то окружность ω пересекает луч m в точках A_1 и A_2. Таким образом, существует два треугольника, удовлетворяющих условиям задачи. Это треугольники A_1BC и A_2BC.



4. Если $CA > CH$ и $CA = BC$, то есть $\begin{cases} b > a \sin \beta \\ b = a \end{cases}$, то окружность ω пересекает луч m в двух точках, одной из которых является точка B. Таким образом, существует только один треугольник, удовлетворяющий условию задачи.



5. Если $CA > CH$ и $CA > BC$, то есть $\begin{cases} b > a\sin\beta \\ b > a \end{cases}$, то окружность ω пересекает в одной точке луч m и в одной точке луч, дополняющий m до прямой. Таким образом, существует только один треугольник, удовлетворяющий условию задачи.

Итак, если известны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из этих сторон, например b, a и $\sin\beta$, то

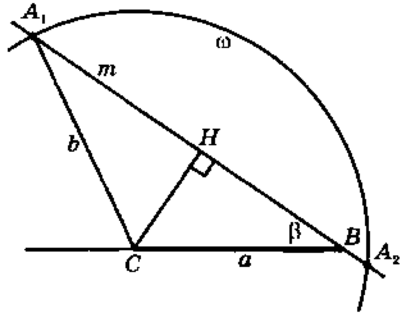
при $b < a\sin\beta$ задача не имеет решений;

при $b = a\sin\beta$ задача имеет одно решение;

при $a\sin\beta < b < a$ задача имеет два решения;

при $b \geqslant a$ задача имеет одно решение.

5. $\begin{cases} CA > CH \\ CA > BC \end{cases}$

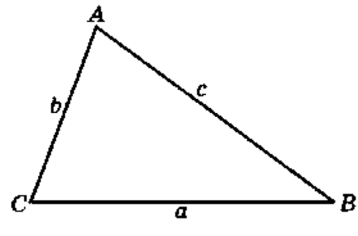


Задача 3. Пусть в треугольнике ABC известны три стороны, $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.

Решить треугольник в этом случае — найти его углы A, B и C.

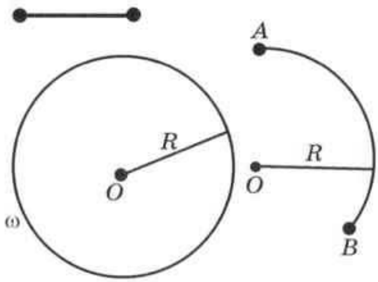
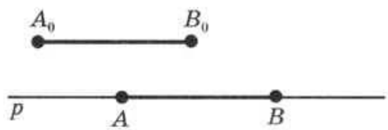
Решение. По теореме косинусов находим $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ и далее вычисляем $\angle A = \alpha$. Аналогично находим $\cos B$ и затем $\angle B = \beta$, а далее $\angle C = 180° - (\beta + \alpha) = \gamma$.

Ясно, что если $b < c$ и $c - b < a < c + b$, то задача имеет единственное решение.



В треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.

4. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

1. С помощью ***линейки*** можно выполнять следующие элементарные построения: — построить отрезок, соединяющий две построенные (данные) точки; — построить луч с началом в одной построенной точке и проходящий через другую построенную точку; — построить прямую, проходящую через две построенные точки.	 Отрезок AB.  Луч (полупрямая) AB.  Прямая AB.
2. С помощью ***циркуля*** можно выполнить следующие элементарные построения: — построить окружность, если построены центр окружности и концы отрезка, равного радиусу окружности; — построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построен центр окружности и концы дуги.	 $\omega(O; R)$ — окружность с центром в точке O, радиус которой равен R. $\cup AB(O; R)$ — дуга AB окружности с центром в точке O, радиус которой равен R.
3. С помощью ***линейки*** и ***циркуля*** можно выполнить следующие элементарные построения: — все построения, выполняемые одной линейкой; — все построения, выполняемые одним циркулем; — построить на данной прямой отрезок, равный данному отрезку с началом в данной точке.	 Отрезок AB построен на данной прямой p, имеет начало в данной точке A, имеет длину, равную длине данного отрезка A_0B_0.

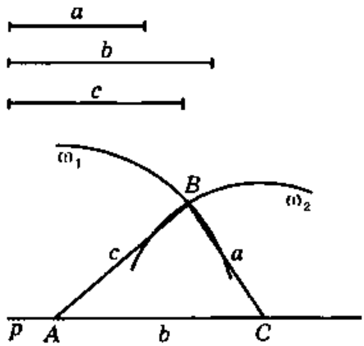
Пять основных задач на построение

Задача 1. Построить треугольник с тремя данными сторонами a, b и c.

План построения

1) p;
2) $A \in p$;
3) $AC = b$, $C \in p$;
4) окружность $\omega_1(A;\ c)$;
5) окружность $\omega_2(C;\ a)$;
6) $B = \omega_1 \cap \omega_2$;
7) BA, BC.

Задача имеет решение, если $|a - c| < b < a + c$.



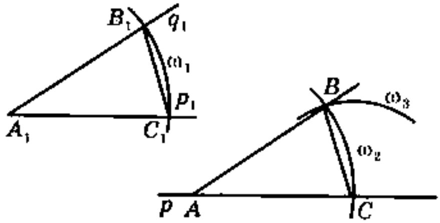
ΔABC — искомый, так как в нем $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$.

Задача 2. Построить угол, равный данному углу A_1.

План построения

1) p;
2) $A \in p$;
3) окружность $\omega_1(A_1;\ r_1)$ и окружность $\omega_2(A;\ r_1)$;
4) $B_1 = \omega_1 \cap q_1$, $C_1 = \omega_1 \cap p_1$;
5) $C = \omega_2 \cap p$;
6) окружность $\omega_3(C;\ B_1C_1)$;
7) $B = \omega_3 \cap \omega_2$;
8) луч AB.

Угол A_1 — данный, лучи p_1 и q_1 — его стороны.

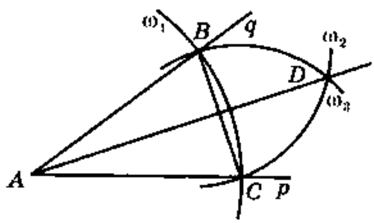


$\angle BAC$ равен данному углу A_1, так как $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.
Угол A — равный данному, лучи p и q — его стороны.

Задача 3. Построить биссектрису данного угла A.

План построения

1) окружность $\omega_1(A;\ r_1)$;
2) $C = \omega_1 \cap p$ и $B = \omega_1 \cap q$;
3) окружность $\omega_2(C;\ r_2)$, и окружность $\omega_3(B;\ r_2)$, причем $r_2 > \frac{1}{2}BC$;
4) $D = \omega_3 \cap \omega_2$;
5) луч AD.

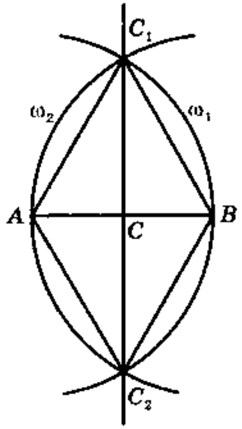


Луч AD — биссектриса угла A. Так как углы DAB и DAC лежат против равных сторон BD и CD равных (по трем сторонам) треугольников ABD и ACD, то $\angle DAB = \angle DAC$.

Задача 4. Разделить пополам данный отрезок AB.

План построения

1) окружность $\omega_1(A;\ AB)$;
2) окружность $\omega_2(B;\ AB)$;
3) $C_1,\ C_2 = \omega_1 \cap \omega_2$;
4) $C = C_1C_2 \cap AB$.



$AC = BC$, так как отрезки AB и C_1C_2 — диагонали ромба AC_1BC_2.

Задача 5. Через данную точку A провести прямую, перпендикулярную данной прямой p.

Возможны два случая:

1. Точка A не лежит на прямой p.
2. Точка A лежит на прямой p.

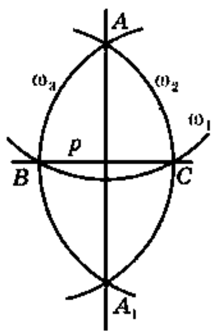
План построения в 1-м случае

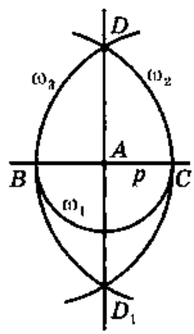
1) окружность $\omega_1(A;\ r_1)$, где r_1 больше расстояния от A до p;
2) $B = \omega_1 \cap p$; $C = \omega_1 \cap p$;
3) окружности $\omega_2(B;\ BA)$, $\omega_3(C;\ BA)$;
4) $A_1 = \omega_3 \cap \omega_2$;
5) AA_1.

План построения во 2-м случае

1) окружность $(A;\ r_1)$;
2) $B = \omega_1 \cap p$; $C = \omega_1 \cap p$;
3) окружности $\omega_2(B;\ BC)$, $\omega_3(C;\ BC)$;
4) $D,\ D_1 = \omega_3 \cap \omega_2$;
5) DD_1.

A — данная точка,
p — данная прямая





1-й случай

$AA_1 \perp p$, так как четырехугольник $BACA_1$ — ромб.

2-й случай

$DD_1 \perp p$, так как четырехугольник $BDCD_1$ — ромб, в котором диагонали DD_1 и BC пересекаются в точке A.

Геометрические места точек

<table>
<tr>
<td>

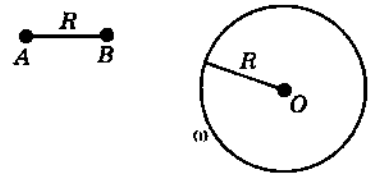
Геометрическим местом точек (***ГМТ***) называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством.

</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

1. Геометрическое место точек, удаленных от данной точки на данное расстояние, есть ***окружность*** с центром в данной точке и радиусом, равным данному расстоянию.

</td>
<td>

O — данная точка, AB — отрезок, его длина — это данное расстояние.



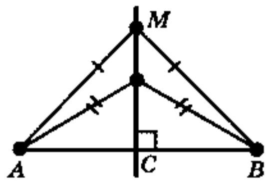
Окружность $\omega(O;\ R)$. Ей принадлежат все точки плоскости, удаленные от данной точки O на данное расстояние R.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть ***серединный перпендикуляр*** к отрезку, соединяющему эти точки.

</td>
<td>

A и B — данные точки, MC — серединный перпендикуляр отрезка AB.

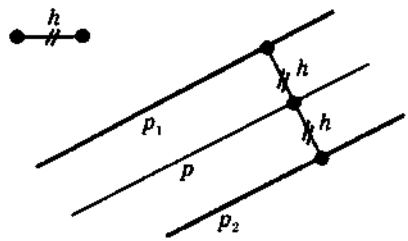


Все точки плоскости, равноудаленные от точек A и B, принадлежат перпендикуляру MC.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

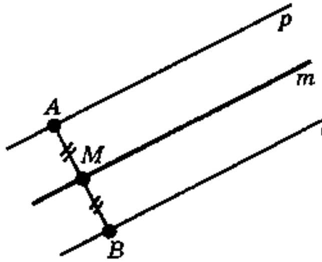
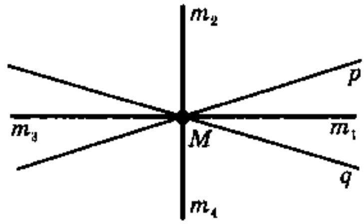
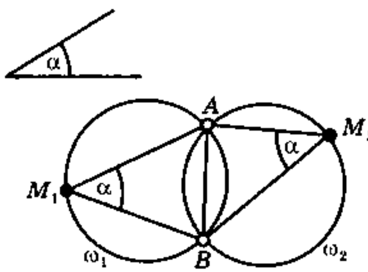
3. Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние, есть ***совокупность двух прямых, параллельных данной*** прямой и удаленных от нее на данное расстояние.

</td>
<td>



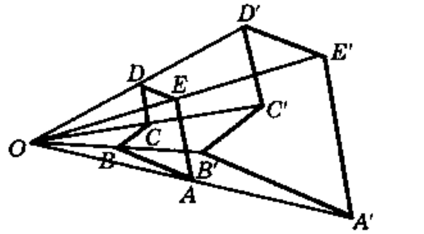
p — данная прямая, $p_1 \parallel p$ и $p_2 \parallel p$. Все точки плоскости, удаленные от прямой p на расстояние h, принадлежат прямым p_1 и p_2.

</td>
</tr>
</table>

4. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых, есть ***параллельная им прямая***, проходящая через точку, являющуюся серединой общего перпендикуляра данных прямых.	 $p \parallel q$ — данные прямые, AB — их общий перпендикуляр, $AM = BM$, $M \in m$, $m \parallel p$. Все точки прямой m равноудалены от p и q.
5. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть ***совокупность двух прямых***, проходящих через точку пересечения данных прямых и делящих пополам вертикальные углы, образованные данными прямыми, то есть совокупность четырех биссектрис углов между данными прямыми. Эти прямые взаимно перпендикулярны.	 p и q — данные прямые, m_1 и m_3, m_2 и m_4 — биссектрисы вертикальных углов, образованных прямыми p и q. Все точки прямых m_1, m_2, m_3 и m_4 равноудалены от прямых p и q.
6. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под углом, равным данному, есть ***совокупность дуг двух сегментов без их концов***, опирающихся на данный отрезок, и вмещающих угол, равный данному.	 AB — данный отрезок, α — данный угол. Из точек дуг сегментов ω_1 и ω_2 без их концов отрезок AB виден под углом, равным α.

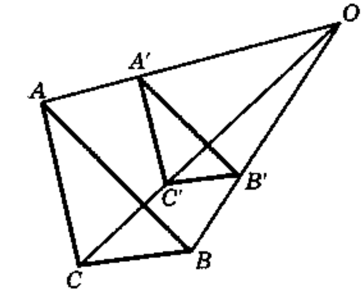
5. ГОМОТЕТИЯ, ПОДОБИЕ

Пусть F — данная фигура и O — фиксированная точка. Проведем через точку A фигуры F луч OA и построим на нем такую точку A', что $OA' = k \cdot OA$, где k — положительное число. Преобразование фигуры F при котором ее точки переходят в точки фигуры F' указанным способом, называется ***гомотетией*** относительно центра O. Число k называется ***коэффициентом гомотетии, а точка O — центром гомотетии***.



Фигура $A'B'C'D'E'$ гомотетична фигуре $ABCDE$ с коэффициентом $k = 2$.

$$\left(\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \ldots = 2\right)$$



Треугольник $A'B'C'$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом $k = \dfrac{2}{3}$.

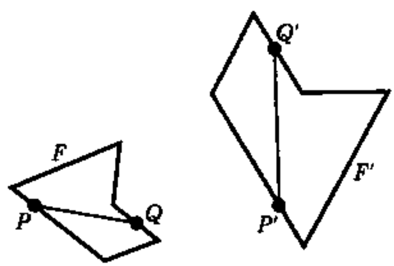
$$\left(\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{2}{3}\right)$$

Преобразованием подобия фигуры F в фигуру F' называется такое ее преобразование, при котором расстояние между двумя точками фигуры F изменяется в одно и то же число раз.

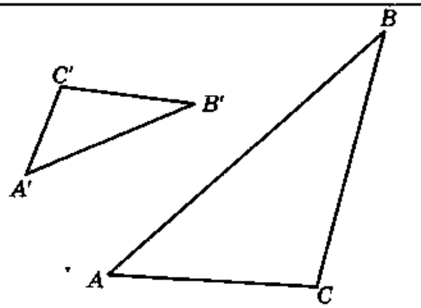
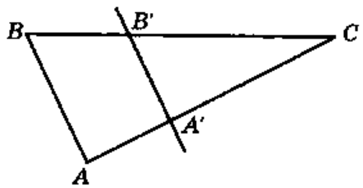
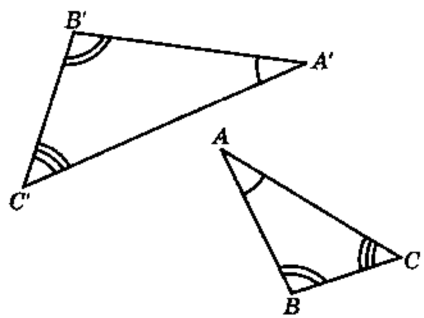
Это положительное число называют ***коэффициентом подобия***.

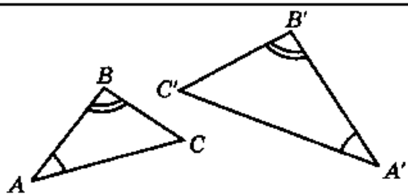
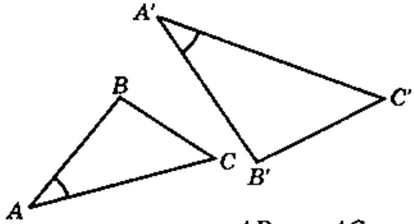
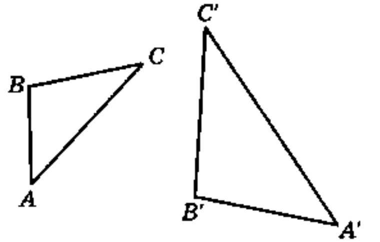
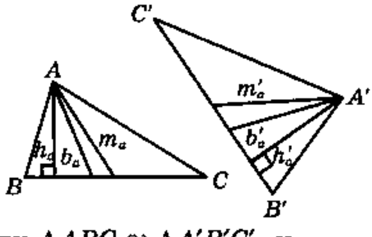
Частным случаем преобразования подобия является ***гомотетия***.

Если фигура F подобна F', то пишут $F \backsim F'$.

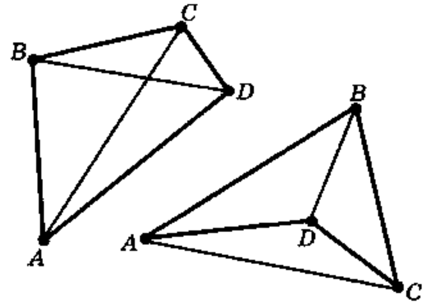
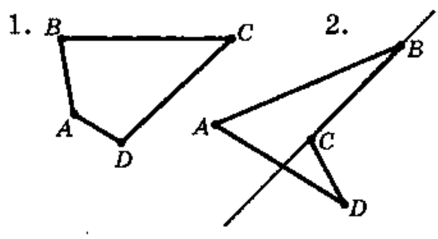


Если $F \backsim F'$ и $P \to P'$, $Q \to Q'$, то $P'Q' = k \cdot PQ$, где $k > 0$.

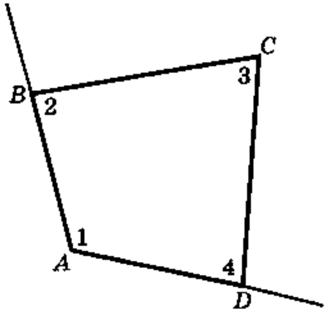
Подобными называются треугольники, у которых соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.	 У треугольников ABC и $A'B'C'$ соответствующие углы равны и отношение сторон $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = 2.$ Эти треугольники подобны по определению.
Существование подобных треугольников Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.	 Если $A'B' \parallel AB$, то $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$.
Свойство преобразования подобия Если фигура F подобна фигуре F', то соответствующие углы этих фигур равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.	 Так если $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, то $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$, и $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.

Признаки подобия треугольников Два треугольника подобны: 1) если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;	 Если $\angle A = \angle A'$ и $\angle B = \angle B'$, то $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
2) если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы, заключенные между этими сторонами, равны;	 Если $\angle A = \angle A'$ и $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
3) если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.	 Если $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
В подобных треугольниках отношению соответствующих сторон равны отношения: а) соответствующих медиан; б) соответствующих биссектрис; в) соответствующих высот; г) периметров этих треугольников.	 Если $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, и $\dfrac{AB}{A'B'} = k$, то $\dfrac{m_a}{m'_a} = k$, $\dfrac{b_a}{b'_a} = k$, $\dfrac{h_a}{h'_a} = k$, $\dfrac{a+b+c}{a'+b'+c'} = k$.

6. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Четырехугольник — это фигура, состоящая из четырех точек, не лежащих на одной прямой, и четырех отрезков, последовательно соединяющих эти точки. Указанные точки и отрезки называются соответственно ***вершинами*** и ***сторонами*** четырехугольника. Вершины, которые являются концами одной из сторон четырехугольника, называются ***соседними***, а вершины, не являющиеся соседними, называются ***противолежащими***. Стороны четырехугольника, имеющие общую вершину, называются ***соседними*** (или ***смежными***), а стороны, не имеющие общей вершины, называются ***противолежащими***. ***Диагональю*** четырехугольника называется отрезок, соединяющий его противолежащие вершины.	 Четырехугольники $ABCD$, у которых: точки A, B, C, D — вершины; A и B, B и C, C и D, D и A — пары соседних вершин; A и C, B и D — пары противолежащих вершин; отрезки AB и BC, CD и DA — стороны; AB и CD, DA и BC — пары противолежащих сторон; AB и BC, BC и CD, CD и DA, DA и AB — пары соседних сторон; отрезки AC и BD — диагонали.
Выпуклым называется такой четырехугольник, который лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.	 1. Четырехугольник $ABCD$ — выпуклый. 2. Четырехугольник $ABCD$ — невыпуклый, так как он расположен по разные стороны, например, от прямой BC.

Углом при определенной вершине выпуклого четырехугольника называется угол, который образован лучами, содержащими стороны четырехугольника при этой вершине.



Например, лучами AB и AD образован угол при вершине A, то есть $\angle 1$.

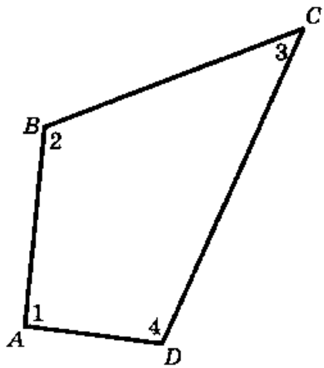
Таким образом, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ — углы четырехугольника.

Углы выпуклого четырехугольника, имеющие общую сторону, называются ***соседними***, а его углы, не имеющие общей стороны — ***противолежащими***.

При этом $\angle 1$ и $\angle 2$, а также $\angle 2$ и $\angle 3$, $\angle 3$ и $\angle 4$, $\angle 4$ и $\angle 1$ — пары соседних углов, $\angle 1$ и $\angle 3$, а также $\angle 2$ и $\angle 4$ — пары противолежащих углов.

Свойства углов выпуклого четырехугольника

1. Каждый угол выпуклого четырехугольника меньше 180°.
2. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.



Периметром четырехугольника называется сумма длин всех его сторон.

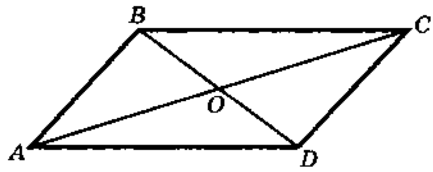
$\angle A < 180°$; $\angle B < 180°$; $\angle C < 180°$; $\angle D < 180°$; $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$.

Периметр четырехугольника $ABCD$ $P = AB + BC + CD + DA$.

Параллелограммом называется четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны.

Свойства параллелограмма

1. Параллелограмм является выпуклым четырехугольником.
2. Противолежащие стороны параллелограмма равны.
3. Противолежащие углы параллелограмма равны.
4. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°.
5. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
6. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.



Если $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$, то $ABCD$ — параллелограмм по определению.

Если $ABCD$ — параллелограмм, то:

1. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2. $AB = CD$ и $AD = BC$.
3. $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$.
4. $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle A + \angle D = 180°$.
5. $AC \cap BD = O$, $AO = OC$ и $BO = OD$.
6. $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

Признаки параллелограмма

Четырехугольник является параллелограммом, если:

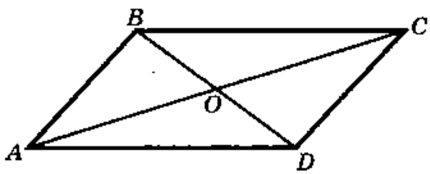
1) две его противолежащие стороны равны и параллельны;

2) противолежащие стороны попарно равны;

3) противолежащие углы равны;

4) сумма углов, прилежащих к каждой стороне, равна 180°;

5) диагонали точкой пересечения делятся пополам.



Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм по признаку, если:

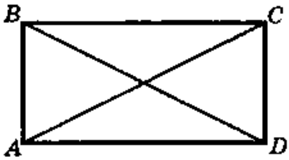
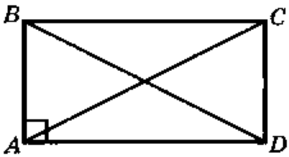
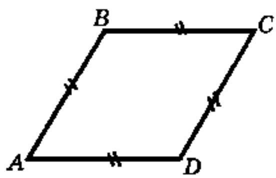
1) $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, или $BC = AD$ и $BC \parallel AD$;

2) $AB = CD$ и $BC = AD$;

3) $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;

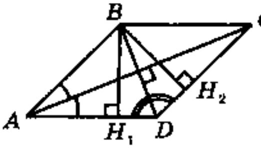
4) $\angle B + \angle C = 180°$ и $\angle C + \angle D = 180°$ или $\angle B + \angle A = 180°$ и $\angle A + \angle D = 180°$;

5) $AO = OC$ и $BO = OD$, где точка $O = AC \cap BD$.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые. **Свойства прямоугольника** 1. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. 2. Диагонали прямоугольника равны. **Признаки прямоугольника** Параллелограмм является прямоугольником в тех случаях, когда: 1) какой-нибудь из его углов является прямым; 2) диагонали его равны.	 У параллелограмма $ABCD$ $\angle A = 90°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 90°$, $\angle D = 90°$, поэтому $ABCD$ — прямоугольник по определению.  Если $ABCD$ — прямоугольник, то: 1. Имеют место свойства 1—6 параллелограмма. 2. $AC = BD$.  Параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником по признаку: 1) если, например, его угол A — прямой; 2) если $AC = BD$.
Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.	 У параллелограмма $ABCD$ $AB = BC = CD = AD$, поэтому $ABCD$ — ромб по определению.

Свойства ромба

1. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.
2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
3. Диагонали ромба делят его углы пополам.
4. Высоты ромба равны.



Если $ABCD$ — ромб, то:

1. Выполняются свойства 1—6 параллелограмма.
2. $AC \perp BD$.
3. $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ADB = \angle CDB$.
4. $BH_1 = BH_2$.

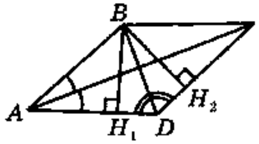
Признаки ромба

Параллелограмм является ромбом в тех случаях, когда:

1) его диагонали взаимно перпендикулярны;

2) диагонали делят его углы пополам;

3) его высоты равны.



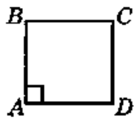
Параллелограмм $ABCD$ является ромбом по признаку, если:

1) $AC \perp BD$;

2) $\angle BAC = \angle DAC$ или $\angle ADB = \angle CDB$;

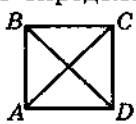
3) $BH_1 = BH_2$.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны, или



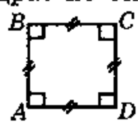
У прямоугольника $ABCD$ $AB = BC = CD = AD$. Поэтому он — квадрат по определению.

квадратом называется ромб, у которого диагонали равны, или



У ромба $ABCD$ $AC = BD$. Поэтому он — квадрат по определению.

квадратом называется ромб, у которого все углы прямые.

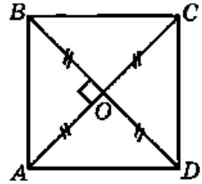


У ромба $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, поэтому он — квадрат по определению.

Свойства квадрата

1. Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника.

2. Квадрат обладает всеми свойствами ромба.



Так, если $ABCD$ — квадрат, то, например:

1. $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$.
2. $AC \cap BD = O$ и $AO = OC$, $BO = OD$.
3. $AC = BD$.
4. $AC \perp BD$.

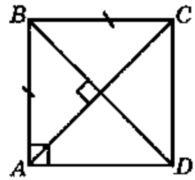
Признаки квадрата

Прямоугольник является квадратом в тех случаях, когда:

1) две его смежные стороны равны;

2) диагонали перпендикулярны;

3) диагональ делит какой-нибудь его угол пополам.



Прямоугольник $ABCD$ является квадратом по признаку, если:

1) $AB = BC$, или $BC = CD$, или $CD = AD$, или $AD = AB$;
2) $AC \perp BD$;
3) $\angle BAC = \angle DAC$, или $\angle ABD = \angle CBD$, или $\angle BCA = \angle DCA$, или $\angle ADB = \angle CDB$.

Еще два признака квадрата

Ромб является квадратом в тех случаях, когда:

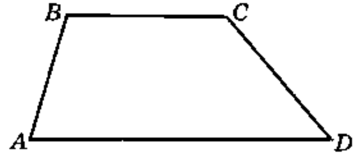
1) его диагонали равны;

2) какой-нибудь из его углов является прямым.

Ромб $ABCD$ является квадратом по признаку, если:

1) если $AC = BD$;
2) если, например, $\angle A = 90°$.

Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

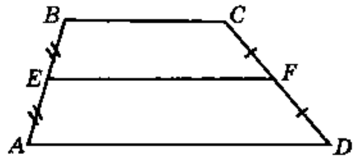


У четырехугольника $ABCD$ $AD \parallel BC$, а $AB \nparallel CD$, следовательно, $ABCD$ — трапеция по определению.

Основаниями трапеции называются ее параллельные стороны, а ***боковыми*** сторонами называются ее непараллельные стороны.

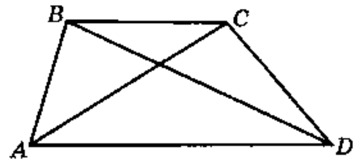
AD и BC — основания трапеции, а AB и CD — ее боковые стороны.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон.



У трапеции $ABCD$ точка E — середина стороны AB, а точка F — середина CD, значит EF — по определению средняя линия трапеции $ABCD$.

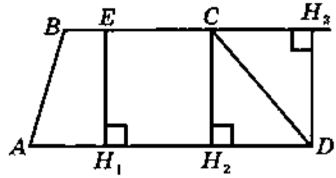
Диагональю трапеции называется отрезок, соединяющий две противолежащие вершины.



AC и BD — диагонали трапеции $ABCD$.

Высотой трапеции называется перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки одного основания на прямую, содержащую другое основание.

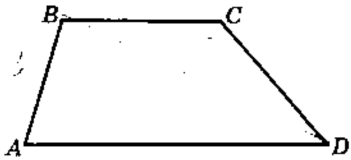
Высоты одной трапеции равны.



Отрезки EH_1, CH_2 и DH_3 — высоты трапеции $ABCD$. При этом $EH_1 = CH_2 = DH_3$.

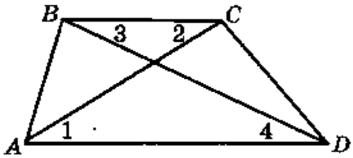
Свойства трапеции

1. Сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне равна 180°.



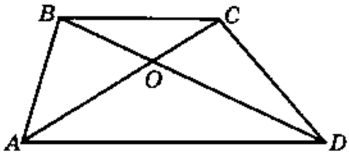
Если $ABCD$ — трапеция, то $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

2. Внутренние накрест лежащие углы между диагональю трапеции и ее основаниями равны.



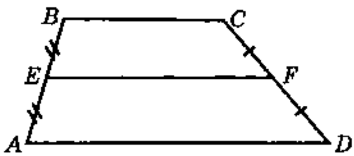
Если $ABCD$ — трапеция, то $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

3. Треугольники, основаниями которых являются основания трапеции, а вершиной — точка пересечения ее диагоналей — подобны.



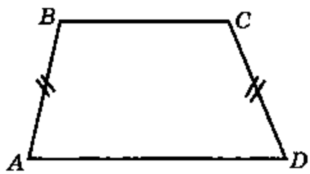
Если $ABCD$ — трапеция, то $\Delta AOD \backsim \Delta COB$.

4. Средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.



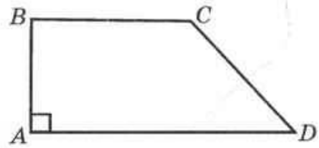
Если EF — средняя линия трапеции $ABCD$, то $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Равнобокой называется трапеция, у которой боковые стороны равны.



Трапеция $ABCD$ — равнобокая, так как $AB = CD$.

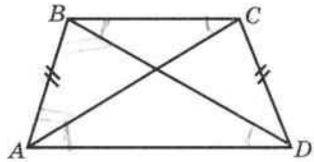
Прямоугольной называется трапеция, у которой один из углов прямой.



Трапеция $ABCD$ — прямоугольная, так как $\angle BAD = 90°$.

Свойства равнобокой трапеции

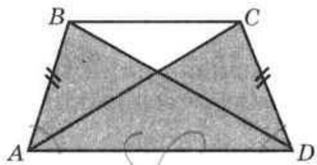
1. Равнобокая трапеция обладает всеми свойствами трапеции.
2. Диагонали равнобокой трапеции равны.
3. Углы при основании равнобокой трапеции равны.
4. Угол между одной диагональю и основанием равнобокой трапеции равен углу между другой ее диагональю и этим же основанием.



Если у трапеции $ABCD$ $AB = CD$, то у нее:

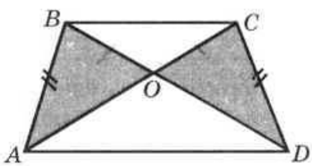
1. $AC = BD$;
2. $\angle BAD = \angle CDA$ и $\angle ABC = \angle DCB$;
3. $\angle CAD = \angle BDA$ и $\angle ACB = \angle DBC$.

5. Треугольники, основаниями каждого из которых является основание равнобокой трапеции, и вершиной — один из концов другого ее основания, равны.



$\Delta BAD = \Delta CDA$ и $\Delta ABC = \Delta DCB$

6. Треугольники, общей вершиной которых является точка пересечения диагоналей равнобокой трапеции, а основаниями — боковые стороны этой трапеции, равны.

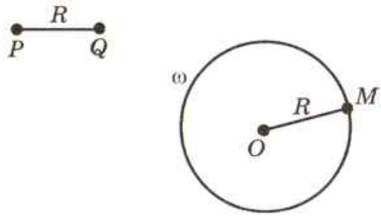


$\Delta OAB = \Delta ODC$

7. ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ

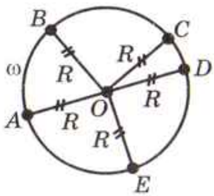
Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек, находящихся от данной точки на расстоянии, равном длине данного отрезка.

Данная точка называется ***центром*** окружности, а данный отрезок — ее ***радиусом***.



O — данная точка, PQ — данный отрезок, длина его равна R.
$\omega(O;\ OM)$ — окружность с центром в точке O и радиусом OM.
$\omega(O;\ R)$ — окружность с центром в точке O и радиусом R.

Длина отрезка, соединяющего любую точку окружности с ее центром, равна радиусу окружности.

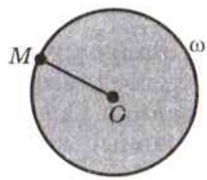


Если $\omega(O;\ OA)$ — окружность, радиусом $OA = R$, и $B, C, D, \ldots$ — ее точки, то $OB = OC = OD = OE = \ldots = R$.

Кругом называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся от данной точки на расстоянии не больше длины данного отрезка.

Данная точка называется ***центром круга***, а отрезок, соединяющий точку окружности с его центром, — ***радиусом*** круга.

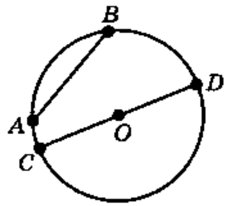
Центр круга является также центром ограничивающей его окружности, а радиус — радиусом этой окружности.



Если $\omega(O;\ OM)$ — окружность, то часть плоскости, закрашенная на рисунке, — это круг.

Хордой окружности называется отрезок, соединяющий две ее точки.

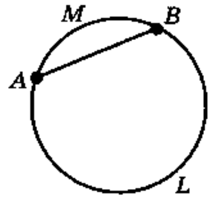
Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр окружности.



AB и CD — хорды окружности. Хорда CD проходит через точку O — центр окружности, поэтому CD является диаметром окружности.

Две точки окружности делят ее на две части. Эти части называются ***дугами*** окружности, а указанные две точки — ***концами*** этих дуг.

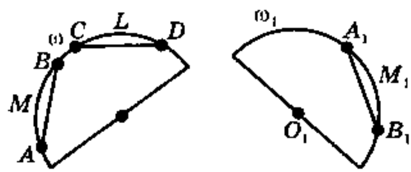
Чтобы различать две дуги, на которые две точки разделили окружность, на каждой из дуг указывают и промежуточную точку.



$\cup AMB$ — дуга с концами в точках A и B, содержащая точку M, $\cup ALB$ — дуга с концами в точках A и B, содержащая точку L. Обе эти дуги стягивает хорда AB.

Полуокружностью называется дуга окружности, для которой хорда, соединяющая ее концы, является диаметром.

В одной полуокружности (или в равных полуокружностях) равные дуги стягиваются равными хордами, и обратно, равные хорды стягивают равные дуги.

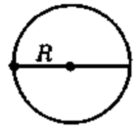


Если в полуокружности ω, $\cup AMB = \cup CLD$, то $AB = CD$ и, если в этой полуокружности $AB = CD$, то $\cup AMB = \cup CLD$.
Если дуги AMB и $A_1M_1B_1$ полуокружностей ω и ω_1 равны, то $AB = A_1B_1$, и наоборот, если $AB = A_1B_1$, то дуги AMB и $A_1M_1B_1$ равных полуокружностей ω и ω_1 равны.

Отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная для каждой окружности.

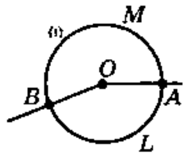
Это отношение обозначают греческой буквой π.

Таким образом, **длина окружности**, радиус которой равен R, вычисляют по формуле $C = 2\pi R$.



Так как $\dfrac{C}{2\pi} = R$, то $C = 2\pi R$.

Центральным углом в окружности называется угол с вершиной в центре этой окружности.

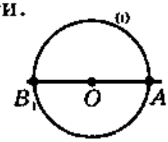


Лучи OA и OB являются сторонами двух центральных углов.

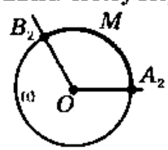
Дуга окружности, заключенная между сторонами центрального угла, называется ***соответствующей*** этому центральному углу.

Дуга AMB — соответствующая дуга одного из центральных углов AOB окружности ω, а дуга ALB — соответствующая дуга другого угла AOB этой же окружности.

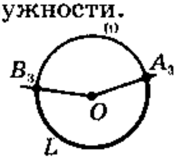
Центральный угол может быть меньше развернутого, равен развернутому и больше развернутого.



Угол A_1OB_1 — развернутый. Соответствующая ему дуга окружности ω равна полуокружности.



Угол A_2OB_2 меньше развернутого. Соответствующая ему дуга A_2MB_2 окружности ω меньше полуокружности.

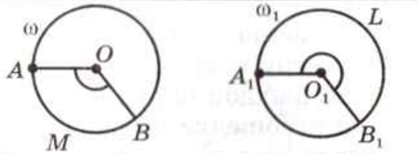


Угол A_3OB_3 больше развернутого. Соответствующая ему дуга ALB окружности ω больше полуокружности.

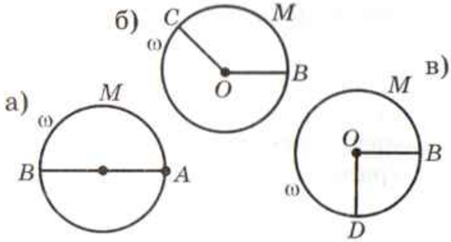
Градусной мерой дуги, соответствующей центральному углу, называется градусная мера этого центрального угла.

Если дуга AB окружности $\omega(O;\ OA)$ меньше полуокружности, или является полуокружностью, то градусная мера этой дуги считается равной градусной мере того центрального угла этой дуги, который меньше $180°$.

Если дуга AB больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной $360° - \angle AOB$.



Градусной мерой дуги AMB по определению является градусная мера центрального угла AOB, а градусной мерой дуги A_1LB_1 — градусная мера центрального угла $A_1O_1B_1$.



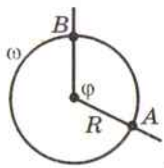
а) градусная мера $\cup AMB$ равна $180°$;

б) градусная мера $\cup CMB$ равна $135°$;

в) градусная мера $\cup DMB$ равна $270°$.

Длина дуги окружности, соответствующая центральному углу $\varphi°$:

$$l = \frac{\pi R}{180}\varphi.$$

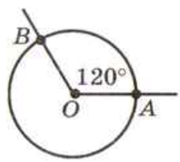


$$l = \frac{\pi R}{180}\varphi$$

Радианной мерой центрального угла называется отношение длины соответствующей дуги окружности к ее радиусу. Так, радианной мерой n центрального угла $\varphi°$ является отношение

$$n = \frac{l}{R} = \frac{\pi R\varphi}{180} : R = \frac{\pi\varphi}{180}.$$

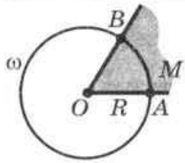
Длина дуги окружности радиуса R, соответствующей центральному углу n радиан: $l = Rn$.



Так, если центральный угол AOB равен $120°$, то радианная мера этого угла

$$n = \frac{\pi}{180°}\cdot 120°, \text{ то есть } n = \frac{2\pi}{3}.$$

1 радиан — это центральный угол окружности, длина соответствующей дуги которого равна радиусу.

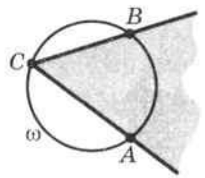


Если длина дуги AMB равна R, то центральный угол AOB равен 1 радиану.

Таблица значений градусной и радианной меры некоторых углов

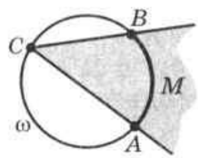
30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.



Вершина угла ACB лежит на окружности, а его стороны CA и CB пересекают окружность. Угол ACB — вписанный.

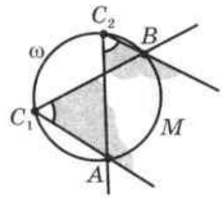
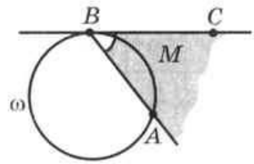
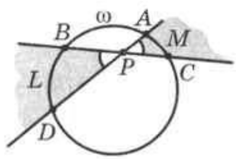
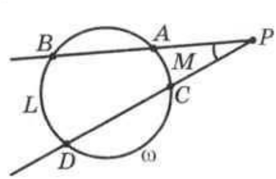
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.



$\angle ACB$ — вписанный. Он измеряется половиной дуги AMB.

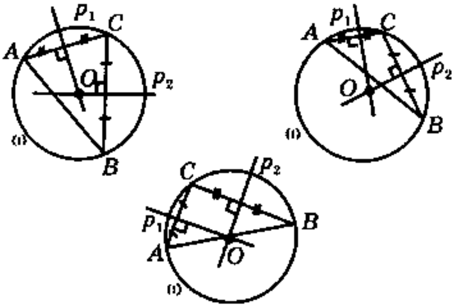
В частности, вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

$\angle ACB$ — вписанный, $\cup AMB$ — полуокружность, поэтому $\angle ACB = 90°$.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны.	 $\angle AC_1B = \angle AC_2B$, так как оба эти угла опираются на дугу AMB.
Угол между касательной к окружности и секущей, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами.	 BC — касательная к окружности, BA — секущая, поэтому $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2} \cup AMB$.
Угол между двумя пересекающимися хордами измеряется полусуммой дуг, заключенных между ними.	 BC и AD — хорды, пересекающиеся в точке P, поэтому $\angle BPD$ измеряется $\frac{1}{2}(\cup AMC + \cup BLD)$.
Угол между двумя секущими, проходящими через точку вне окружности, измеряется полуразностью дуг, заключенных между этими секущими.	 PB и PD — секущие, пересекающиеся в точке P вне окружности, поэтому $\angle BPD$ измеряется $\frac{1}{2}(\cup BLD - \cup AMC)$.

Около любого треугольника можно описать окружность и только одну.

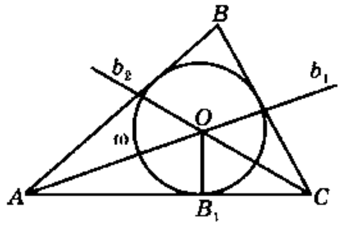
Центром этой окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.



В частности, центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы.

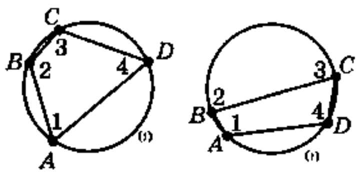
Прямые p_1 и p_2 — серединные перпендикуляры соответствующих сторон AC и BC ΔABC. Точка $O = p_1 \cap p_2$ —центр окружности $\omega(O;\ OA)$, описанной около ΔABC.
Если ΔABC — прямоугольный, то точка O — середина гипотенузы AB.

В любой треугольник можно вписать окружность и только одну. Центром ее является точка пересечения биссектрис углов треугольника.



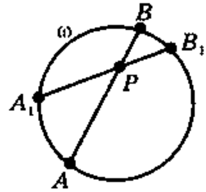
Полупрямые b_1 и b_2 — биссектрисы соответственно углов A и C треугольника ABC.
Точка $O = b_1 \cap b_2$ — центр окружности $\omega(O;\ OB_1)$, вписанной в ΔABC.

Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов его равна 180°.



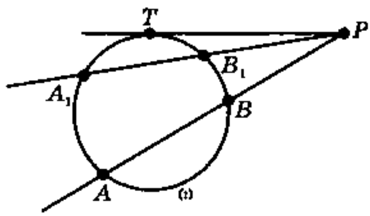
В четырехугольнике $ABCD$ $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ (и $\angle 2 + \angle 4 = 180°$), поэтому около него можно описать окружность.

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды.



Если $AB \cap A_1B_1 = P$, то $AP \cdot BP = A_1P \cdot B_1P$.

Если точка P лежит вне окружности и прямая, проходящая через эту точку, пересекает окружность в точках A и B, то произведение $AP \cdot BP$ — есть величина постоянная для данной окружности, и она равна квадрату отрезка касательной, проведенной к окружности из точки P.



Если AB и A_1B_1 — секущие, $AB \cap A_1B_1 = P$ и TP — касательная, то $AP \cdot BP = A_1P \cdot B_1P = PT^2$.

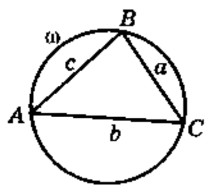
Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Во всяком треугольнике

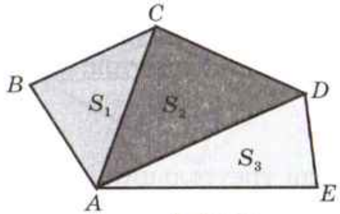
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.



8. ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Фигура называется ***простой***, если ее можно разбить на конечное число треугольников. (Под треугольником понимается часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, состоящей из трех звеньев.)



Многоугольник $ABCDE$ является простой фигурой, т. к. его можно разбить на треугольники (например, на ΔABC, ΔACD и ΔADE). Площадь этого многоугольника

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}.$$

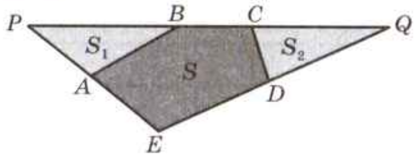
Круг не является простой фигурой, так как его нельзя разбить на треугольники.

Площади каждой простой фигуры ставится в соответствие положительное число, при этом:

1) равные фигуры имеют равные площади;

2) если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей;

3) площадь квадрата, сторона которого равна единице измерения, равна единице.



Если простой многоугольник $ABCDE$ дополнить до треугольника PQE, то

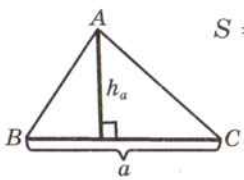
$$S_{PQE} = S_{ABCDE} + S_{PAB} + S_{CDQ},$$

откуда

$$S_{ABCDE} = S_{PQE} - S_{PAB} - S_{CDQ}.$$

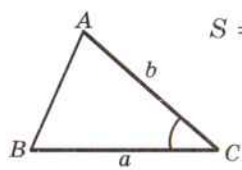
Площадь треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к этому основанию.



$$S = \frac{1}{2} a h_a;$$

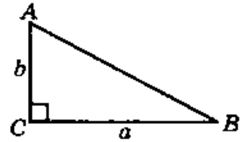
2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

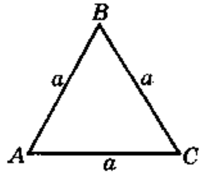
В частности:

если треугольник — прямоугольный, то его площадь равна половине произведения катетов;



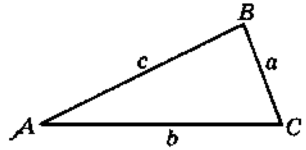
$$S = \frac{1}{2}ab$$

если треугольник — равносторонний, то его площадь равна квадрату стороны, умноженному на $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

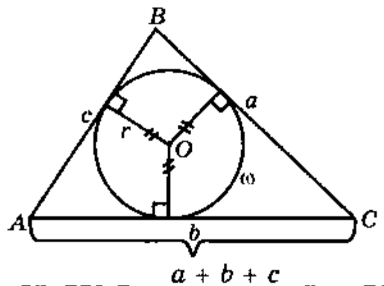
3. **Формула Герона.** Площадь треугольника равна корню квадратному из произведения полупериметра треугольника на разности полупериметра и каждой из сторон.



$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

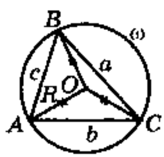
где $p = \frac{a+b+c}{2}$;

4. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

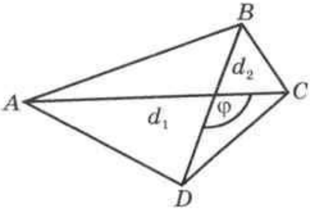
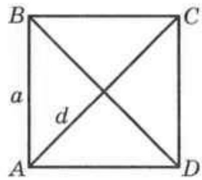
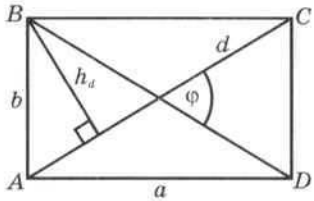
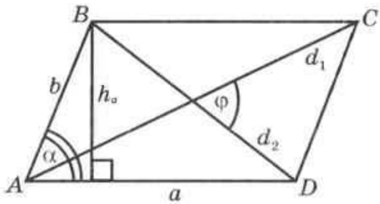


$S = pr$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$, r — радиус вписанной окружности.

5. Площадь треугольника равна частному от деления произведения его сторон на учетверенный радиус описанной окружности.



$S = \frac{abc}{4R}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

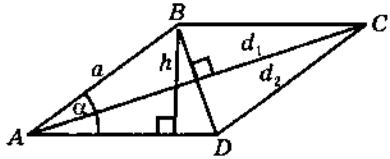
Площадь произвольного выпуклого четырехугольника Площадь произвольного выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.	 $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$
Площадь квадрата 1. Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей. 2. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.	 1. $S = \frac{1}{2} d^2$; 2. $S = a^2$.
Площадь прямоугольника 1. Площадь прямоугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. 2. Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон. 3. Площадь прямоугольника равна произведению его диагонали на высоту, опущенную из вершины прямоугольника на эту диагональ.	 1. $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$; 2. $S = ab$; 3. $S = dh_d$.
Площадь параллелограмма 1. Площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. 2. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними. 3. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную из вершины параллелограмма на эту сторону.	 1. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$; 2. $S = ab \sin \alpha$; 3. $S = ah_a$.

Площадь ромба

1. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

2. Площадь ромба равна произведению квадрата стороны на синус его острого угла.

3. Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту.

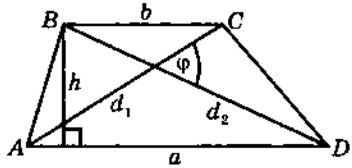


1. $S = \frac{1}{2}d_1d_2$; 2. $S = a^2 \sin\alpha$ или $S = a^2\sin(180^\circ - \alpha)$; 3. $S = ah$.

Площадь трапеции

1. Площадь трапеции равна половине произведения ее диагоналей на синус угла между ними.

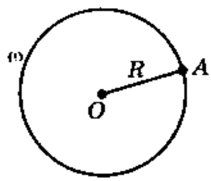
2. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.



1. $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$; 2. $S = \frac{a+b}{2}h$.

Площадь круга

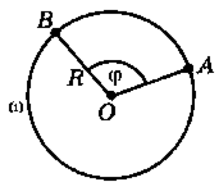
Площадь круга равна произведению числа π на квадрат его радиуса.



$S = \pi R^2$

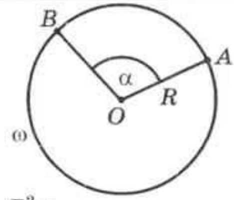
Площадь кругового сектора

1. Если радиус круга равен R, а соответствующий центральный угол равен φ градусов, то площадь кругового сектора равна $S = \pi R^2\frac{\varphi}{360}$.



$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2\varphi}{360}$

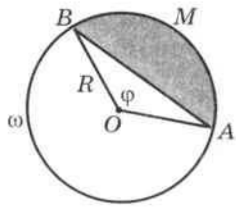
2. Если радиус круга равен R, а соответствующий центральный угол равен α радиан, то площадь кругового сектора равна $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$.



$$S_{\text{сект}} = \frac{R^2\alpha}{2}$$

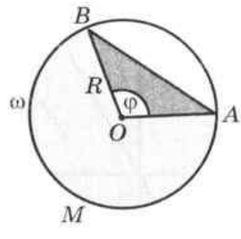
Площадь кругового сегмента

1. Если $\cup AMB \leqslant 180°$, то площадь кругового сегмента равна разности площадей соответствующих ему кругового сектора и треугольника.



$$S = S_{OAMB} - S_{OAB} = \\ = \pi R^2 \frac{\varphi}{360} - \frac{R^2 \sin\varphi}{2}$$

2. Если $\cup AMB > 180°$, то площадь кругового сегмента равна сумме площадей соответствующих ему кругового сектора и треугольника.



$$S = S_{OAMB} + S_{OAB} = \\ = \pi R^2 \frac{(360 - \varphi)}{360} + \frac{R^2 \sin\varphi}{2}$$

9. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ (ДЕКАРТОВЫ) КООРДИНАТЫ

Координаты середины данного отрезка

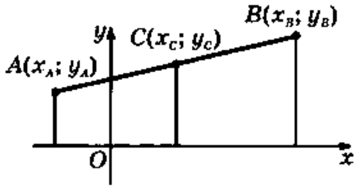
Если координаты точек A и B — концов отрезка AB — известны: $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$, то координаты точки C — середины отрезка AB — вычисляются по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2};$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

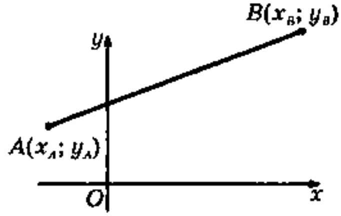
Длина отрезка AB, заданного координатами своих концов: $(x_A;\ y_A)$ и $(x_B;\ y_B)$

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$



Если точка $C(x_C;\ y_C)$ — середина отрезка AB, то

$$C\left(\frac{x_A + x_B}{2};\ \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

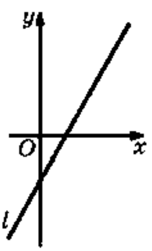
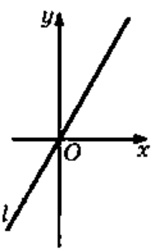
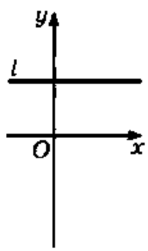
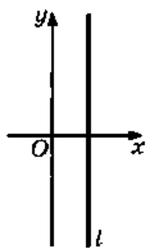
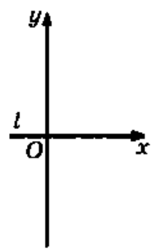
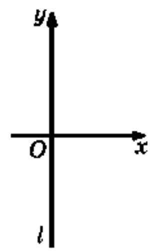


Длина отрезка AB:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

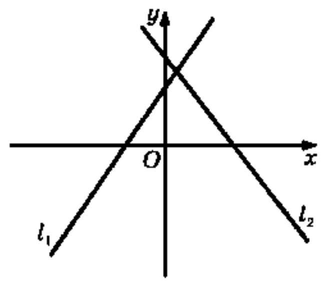
Общее уравнение прямой l: $ax + by + c = 0$, где $a^2 + b^2 \neq 0$

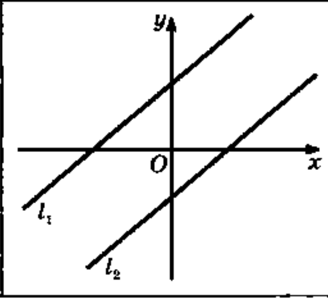
Расположение прямой l относительно прямоугольной системы координат Oxy

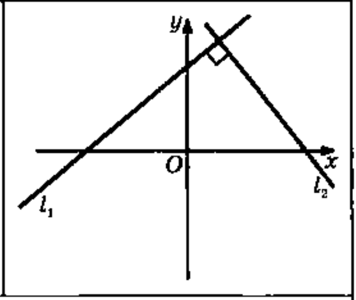
$ab \neq 0$	$\begin{cases} c = 0, \\ ab \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a = 0, \\ bc \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b = 0, \\ ac \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a = c = 0, \\ b \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b = c = 0, \\ ab \neq 0 \end{cases}$
					
$l: ax + by + c = 0$	$l: ax + by = 0$	$l: by + c = 0$	$l: ax + c = 0$	$l: by = 0$	$l: ax = 0$
	$O \in l$	$l \parallel Ox$	$l \parallel Oy$	$O \in l,\ l \parallel Ox$	$O \in l,\ l \parallel Oy$

Взаимное расположение прямых l_1 и l_2: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то $l_1 \cap l_2$	Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то $l_1 \parallel l_2$	Если $a_1a_2 = -b_1b_2$, то $l_1 \perp l_2$



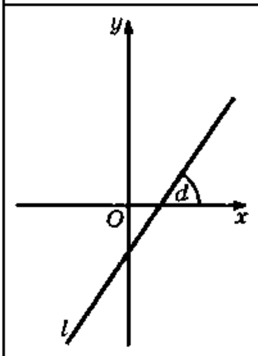




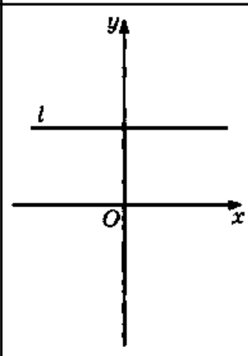
Уравнение прямой l с угловым коэффициентом: $y = kx + b$

Расположение прямой $y = kx + b$ относительно системы координат Oxy

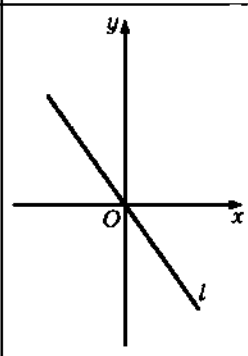
$bk \neq 0$	$\begin{cases} b \neq 0, \\ k = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b = 0, \\ k \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} b = 0, \\ k = 0 \end{cases}$



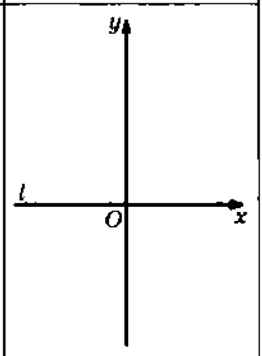
$l : y = kx + b$



$l : \begin{cases} y = b, \\ l \parallel Ox \end{cases}$



$l : \begin{cases} y = kx, \\ O \in l \end{cases}$

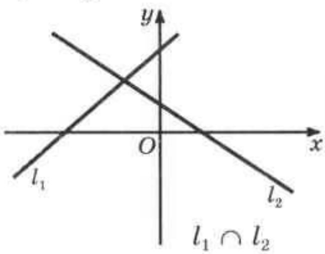


$l : \begin{cases} y = 0, \\ O \in l,\ l \parallel Ox \end{cases}$

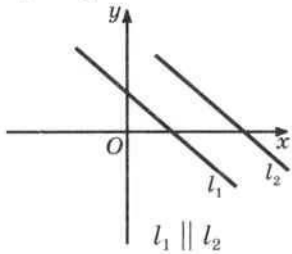
Тангенс угла φ между неперпендикулярными прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$: $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right|$. В частности, если $k_1 = k_2$, то $l_1 \parallel l_2$, а если $k_1k_2 = -1$, то $l_1 \perp l_2$.

Взаимное расположение прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$

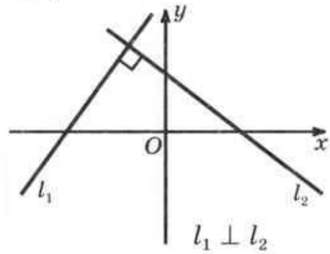
$k_1 \neq k_2$



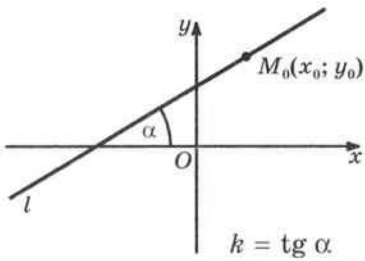
$k_1 = k_2$



$k_1k_2 = -1$

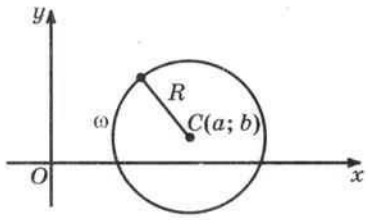


Уравнение прямой l, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ с данным угловым коэффициентом k: $y = y_0 + k(x - x_0)$



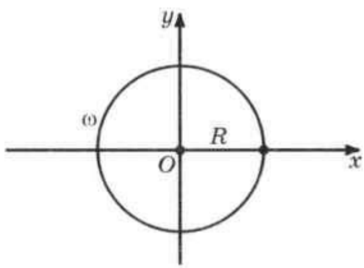
Уравнение окружности ω с центром в точке $C(a; b)$ и радиусом, равным R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$



Если, в частности, центром окружности ω является точка O — начало прямоугольной системы координат, то есть $a = b = 0$, то уравнение окружности $\omega(O, R)$:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



10. ВЕКТОРЫ

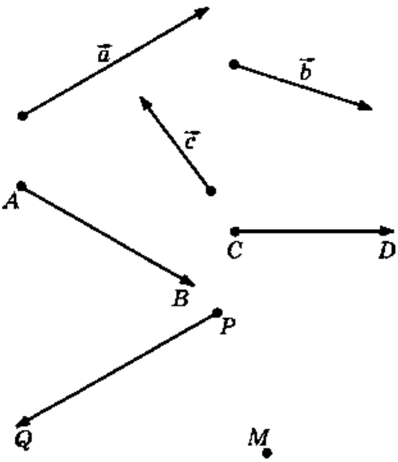
Вектором называется направленный отрезок. Одна из точек, ограничивающих этот отрезок, принимается за начало вектора, другая является тогда его концом.

Векторы обозначаются либо строчными латинскими буквами со стрелкой над буквой ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...), либо двумя прописными латинскими буквами ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$, ...). В этом случае первая буква в записи вектора — это его начало, вторая — конец.

Вектор характеризуется направлением и длиной.

В целях общности выводов вектором считают также отрезок, начало и конец которого совпадают.

Такой вектор направления не имеет. Его называют ***нулевым вектором***.



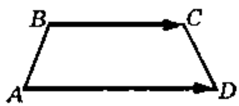
Длиной ненулевого вектора называется расстояние между его началом и концом.

Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Коллинеарными называются такие два ненулевых вектора, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

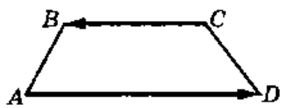
Сонаправленными (***противоположно направленными***) называются такие коллинеарные векторы, одноименные лучи которых сонаправлены (противоположно направлены).

Пусть четырехугольник $ABCD$ — трапеция.



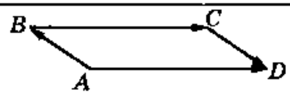
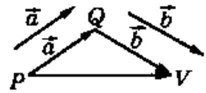
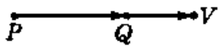
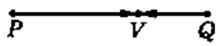
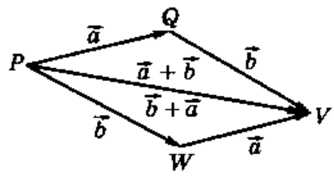
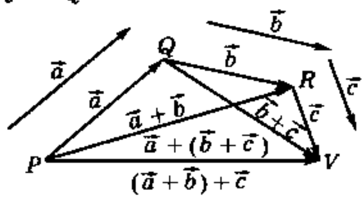
Тогда векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены: $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$.



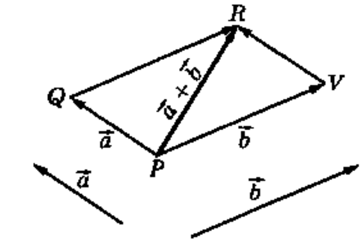
Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны: $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{CB}$.

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ противоположно направлены: $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$.

Равными называются такие ненулевые векторы, которые сонаправлены и имеют равные длины.	 Если, например, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, так как они сонаправлены и имеют равные длины, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не равны, так как хотя их длины равны, но они не сонаправлены.
Сумма векторов Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы. Отложим от какой-нибудь точки P вектор $\overrightarrow{PQ}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки Q отложим вектор $\overrightarrow{QV}$, равный $\vec{b}$, и построим вектор $\overrightarrow{PV}$, полученный указанным образом, который называется ***суммой векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{PV} = \vec{a} + \vec{b}$, а указанный способ сложения двух векторов называется ***правилом треугольника***. Для любых трех точек P, Q и V имеет место равенство: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QV} = \overrightarrow{PV}$ (*правило треугольника*).	   
Законы сложения векторов Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства: 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*переместительный закон*); 2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (*сочетательный закон*).	1.  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QV} = \overrightarrow{PW} + \overrightarrow{WV}$ 2.  $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RV} = \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RV})$

Правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов.

Чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки векторы, равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Например, от точки P отложить векторы $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{PV} = \vec{b}$; затем построить параллелограмм $PQRV$. При таком построении вектор $\overrightarrow{PR}$ равен $\vec{a} + \vec{b}$.



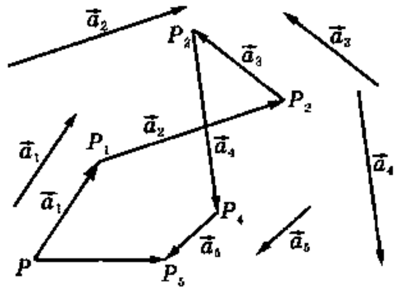
P — произвольная точка, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные векторы.

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PV} = \vec{a} + \vec{b}$.

Правило многоугольника

Чтобы найти сумму n векторов $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$, от произвольной точки P отложим вектор $\overrightarrow{PP_1} = \vec{a}_1$. Затем от точки P_1 отложим вектор $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}_2$, от точки P_2 отложим вектор $\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{a}_3$ и т. д. и, наконец, от точки P_{n-1} отложим вектор $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ $\vec{a} = \vec{a}_n$.

Вектор $\overrightarrow{PP_n}$ равен искомой сумме n данных векторов.

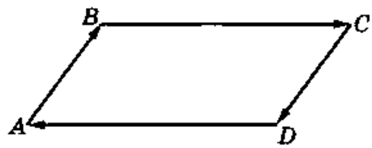


P — произвольная точка, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ... , $\vec{a}_n$ — данные векторы,

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \overrightarrow{P_4P_5} = \overrightarrow{PP_5}$.

Противоположными называются такие два вектора, которые имеют равные длины, но противоположно направлены.

Сумма двух противоположных векторов равна нулевому вектору.



Например, в параллелограмме $ABCD$ векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — противоположные векторы, то есть $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$;

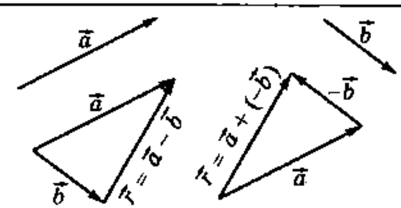
$\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ — также противоположные векторы, следовательно, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a} - \vec{b}$ называется такой вектор $\vec{r}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

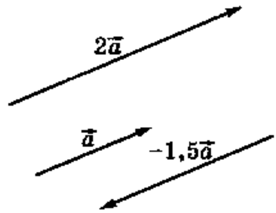


$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные векторы, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{r}$, так как $\vec{b} + \vec{r} = \vec{a}$.

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем если $k > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, а если $k < 0$, то противоположно направлены.

Если $k = 0$, то вектор $k\vec{a}$ равен нулевому вектору.



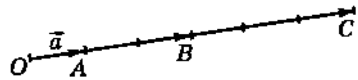
Условие коллинеарности двух векторов

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является существование такого числа $k \neq 0$, что $\vec{a} = k\vec{b}$.

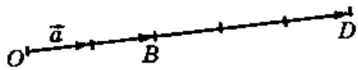
Свойства умножения вектора на число

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ выполняются равенства:

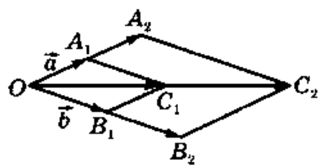
1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон);
2. $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон);
3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).



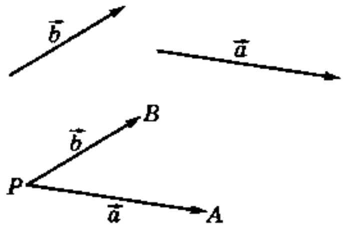
1. Например, $(2 \cdot 3)\vec{a} = 6\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ и $2(3\vec{a}) = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.



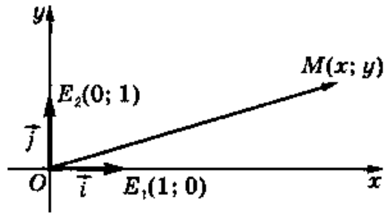
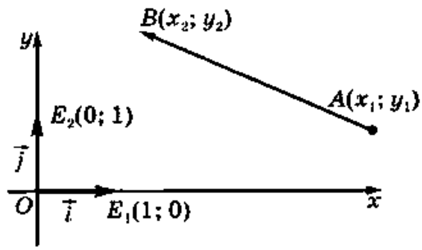
2. Например, $(2 + 3)\vec{a} = 5\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$ и $2\vec{a} + 3\vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD}$.

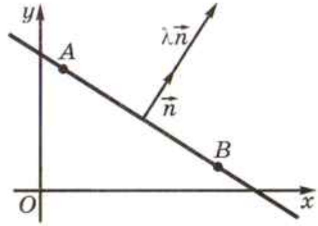


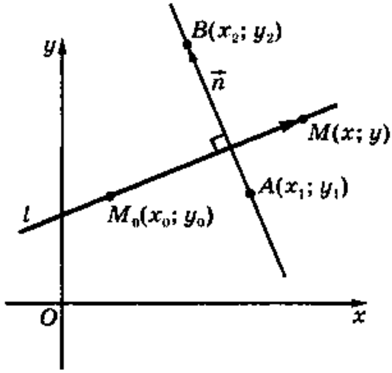
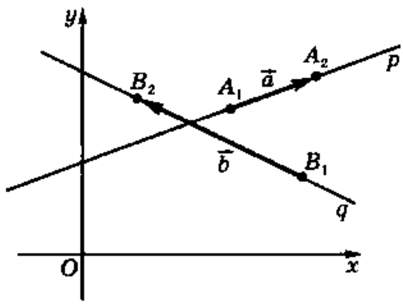
3. Например, $2(\vec{a} + \vec{b}) = 2(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}) = 2\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC_2}$ и $2\vec{a} + 2\vec{b} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OC_2}$.

Угол между векторами Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два данных вектора. От произвольной точки P отложим векторы $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не сонаправлены, то лучи PA и PB образуют угол APB. Градусная мера этого угла APB принимается за градусную меру угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то угол между ними считается равным 0°. ***Перпендикулярными*** называются такие два вектора, угол между которыми равен 90°.	 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = \angle APB.$
Скалярное произведение векторов ***Скалярным произведением двух векторов*** называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b})$ Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны. Если векторы сонаправлены, то их скалярное произведение равно произведению их модулей. Если векторы противоположно направлены, то их скалярное произведение равно числу, противоположному произведению их модулей.	Если $\lvert\vec{a}\rvert = 2, \lvert\vec{b}\rvert = 3$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}.$ Если $\lvert\vec{a}\rvert = 2, \lvert\vec{b}\rvert = 3$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.$ Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos 90° = 0.$ Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos 0° = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert.$ Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos 180° =$ $= -\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert.$

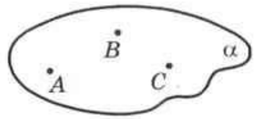
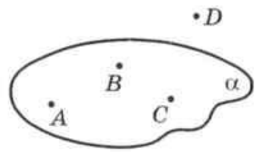
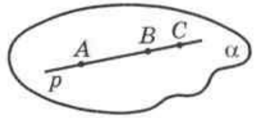
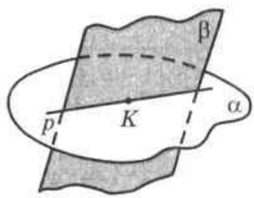
11. ВЕКТОРЫ В КООРДИНАТАХ

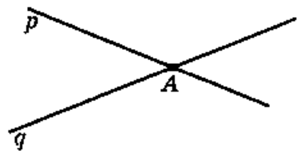
Если в прямоугольной системе координат Oxy точки E_1 и E_2 имеют координаты соответственно (1; 0) и (0; 1), то векторы $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$ называются координатными векторами этой системы координат. Таким образом, если векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ являются координатными, то $\vec{i} \perp \vec{j}$ и $\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = 1$. Если точка M имеет координаты $(x; y)$, то вектор $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, или короче: $\overrightarrow{OM}(x; y)$. Коэффициенты x и y этого разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ называются ***координатами вектора*** $\overrightarrow{OM}$. Любой вектор $\overrightarrow{OM}$ может быть единственным образом разложен по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ прямоугольной системы координат Oxy. Если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$, или короче: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.	 
Если векторы равны, то их соответственные координаты равны.	Так, если $\vec{p}(x_1; y_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2)$ — равные векторы ($\vec{p} = \vec{q}$), то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
Каждая координата вектора, равного сумме двух векторов, равна сумме соответствующих координат этих векторов. Каждая координата вектора, равного разности двух векторов, равна разности соответствующих координат этих векторов.	Так, если вектор $\vec{s}(x; y)$ равен сумме векторов $\vec{p}(x_1; y_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2)$, то $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$, то есть $\vec{s}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$. Так, если вектор $\vec{r}(x; y)$ равен разности векторов $\vec{p}(x_1; y_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2)$, то $x = x_1 - x_2$ и $y = y_1 - y_2$, то есть $\vec{r}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.
Каждая координата вектора, умноженного на число, равна произведению соответствующей координаты на это число.	Если $\vec{p}(x; y)$, то $\lambda\vec{p}(\lambda x; \lambda y)$.

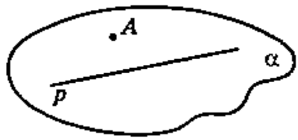
Условие коллинеарности двух векторов Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{p}(x_1; y_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2)$ является существование такого числа $k \neq 0$, что $x_1 = kx_2$ и $y_1 = ky_2$. **Вычисление длины вектора** Если $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, то $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.	Если $\vec{p}(x_1; y_1) \parallel \vec{q}(x_2; y_2)$, то существует такое число $k \neq 0$, что $x_1 = kx_2$ и $y_1 = ky_2$ или $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. И обратно, если векторы $\vec{p}(x_1; y_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2)$ таковы, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, то $\vec{p} \parallel \vec{q}$. В частности, если $\vec{p}(x; y)$, то $\lvert\vec{p}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.	Если $\vec{p}(x_1; y_1)$, $\vec{q}(x_2; y_2)$, то $\vec{p}\vec{q} = x_1x_2 + y_1y_2$.
Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю суммы произведений одноименных координат этих векторов.	Если $\vec{p}(x_1; y_1) \perp \vec{q}(x_2; y_2)$, то $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. И обратно, если координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ соответственно векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ связаны равенством $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, то $\vec{p} \perp \vec{q}$.
Направляющим вектором данной прямой называется любой ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой. Если вектор $\vec{p}(x; y)$ — направляющий вектор прямой, проходящей через точки $A(a_1; a_2)$ и $B(b_1; b_2)$, то координаты вектора $\vec{p}$ пропорциональны координатам вектора $\overrightarrow{AB}$.	Если A и B — точки прямой AB, то любой вектор $\lambda\overrightarrow{AB}$ является направляющим вектором прямой AB. Если $\vec{p} \parallel \overrightarrow{AB}$, то $\frac{x}{b_1 - a_1} = \frac{y}{b_2 - a_2}$.
Нормальным вектором данной прямой называется любой вектор, перпендикулярный этой прямой. Если вектор $\vec{n}$ является нормальным вектором прямой AB, то и вектор $\lambda\vec{n} (\lambda \neq 0)$ является нормальным вектором этой прямой.	

Составление уравнения прямой l, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0)$, перпендикулярно прямой, проходящей через данные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ *План решения* 1. Вектор $\vec{n} = \overline{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ является нормальным вектором искомой прямой l: $\vec{n} \perp l$. 2. Пусть точка $M(x;\ y)$ принадлежит искомой прямой l. Так как $\vec{n} \perp l$, то $\overline{AB} \perp \overline{MM_0}$ или $\vec{n} \cdot \overline{MM_0} = 0$. 3. Полагая для краткости $x_2 - x_1 = n_1$, $y_2 - y_1 = n_2$, получаем $(x - x_0)n_1 + (y - y_0)\,n_2 = 0$.	 Уравнение прямой l: $(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 = 0$, где $(x_0;\ y_0)$ — координаты данной точки, $n_1 = x_2 - x_1$ и $n_2 = y_2 - y_1$ — координаты какого-нибудь нормального вектора прямой l.
Вычисление косинуса угла между данными прямыми p и q *План решения* Найдем координаты направляющих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно прямых p и q. Это можно сделать, если найти координаты каких-нибудь двух точек A_1 и A_2 на прямой p и каких-нибудь двух точек B_1 и B_2 на прямой q. Пусть $\overline{A_1A_2} = \vec{a}(a_1;\ a_2)$, $\overline{B_1B_2} = \vec{b}(b_1;\ b_2)$. Тогда $\cos(p\,\hat{}\,q) = \cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \dfrac{\lvert a_1b_1 + a_2b_2\rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.	

1. АКСИОМЫ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ И ПЕРВЫЕ ТЕОРЕМЫ

Аксиома 1. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.	 A, B, $C \in \alpha$ и если $A \notin BC$, то α — единственная.
Аксиома 2. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.	 Существует $D \notin ABC$.
Аксиома 3. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.	 Если $\left.\begin{matrix} A, B, C \in p \\ A, B \in \alpha \end{matrix}\right\}$, то $C \in \alpha$.
Аксиома 4. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.	 Если $\left.\begin{matrix} K \in \alpha \\ K \in \beta \end{matrix}\right\}$, то $\alpha \cap \beta = p$, $K \in p$.

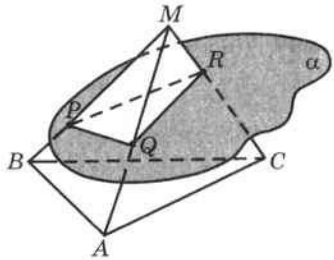
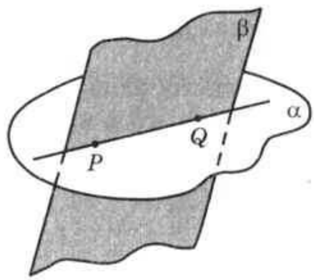
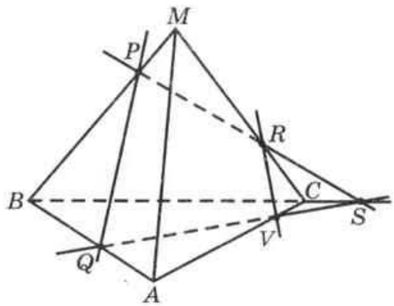
<table>
<tr><td>Пересекающимися прямыми называются такие прямые, которые имеют только одну общую точку.</td><td>

$p \cap q = A$.</td></tr>
<tr><td>Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.</td><td>

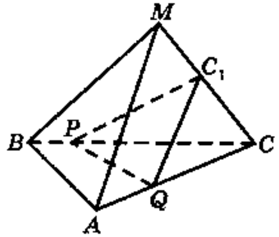
Если $A \notin p$, то существует единственная плоскость α, которой принадлежат A и p.</td></tr>
<tr><td>Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.</td><td>

Если $p \cap q$, то существует единственная плоскость α, которой принадлежат прямые p и q.</td></tr>
</table>

2. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ МЕТОДОМ СЛЕДОВ

Секущей плоскостью выпуклого многогранника называется плоскость, по обе стороны которой имеются точки этого многогранника.	 α — секущая плоскость пирамиды *MABC*.
Линия пересечения двух плоскостей называется также ***следом*** одной плоскости на другой.	 Прямая *PQ* — линия пересечения плоскостей α и β — это след плоскости α на плоскости β, и след плоскости β на плоскости α.
Следом секущей плоскости на плоскости данной грани выпуклого многогранника называется линия пересечения секущей плоскости с плоскостью этой грани.	 Прямые *QP*, *PR*, *RV* и *VQ* — следы плоскости *PQR* соответственно на плоскостях *MAB*, *MBC*, *MCA* и *ABC* пирамиды *MABC*.

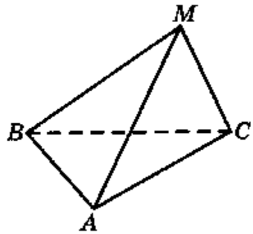
Следом секущей плоскости на грани выпуклого многоугольника называется множество общих точек секущей плоскости и этой грани.



Отрезки PC_1, C_1Q и PQ — следы секущей плоскости соответственно на гранях MBC, MCA и ABC пирамиды $MABC$.

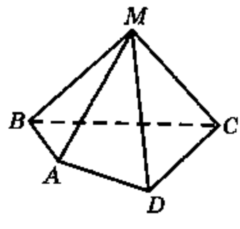
Основным следом секущей плоскости называется ее след на плоскости, принятой за основание многогранника.

Если многогранник — треугольная пирамида, то в качестве плоскости основания может быть принята плоскость любой ее грани.



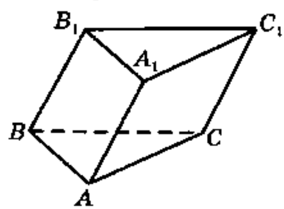
Плоскость любой грани треугольной пирамиды можно считать плоскостью ее основания.

Если многогранник — это n-угольная пирамида ($n > 3$), то плоскостью ее основания является грань, представляющая собой n-угольник.

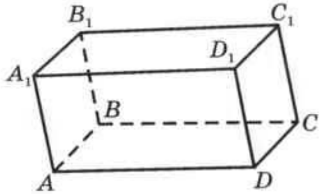


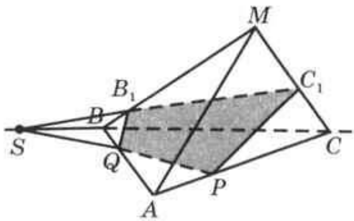
Плоскость $ABCD$ — это плоскость основания пирамиды $MABCD$.

Если многогранник — это призма, то основной след ее секущей плоскости строят обычно на плоскости нижнего основания.

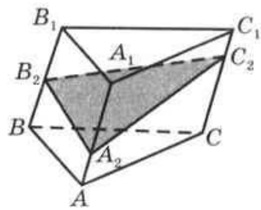


Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ — плоскости оснований призмы $ABCA_1B_1C_1$.

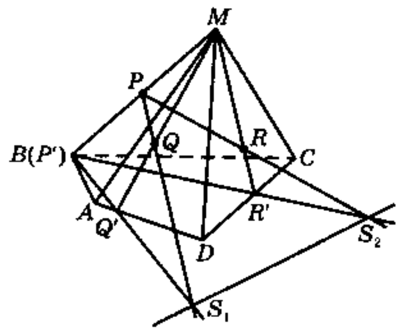
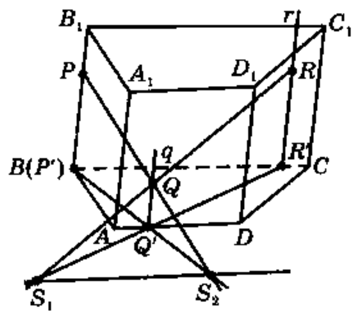
<table>
<tr>
<td>Если многогранник — это параллелепипед, то плоскость любой его грани может быть принята за плоскость основания.</td>
<td>

Плоскость любой из 6 граней может быть принята за плоскость основания параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Сечением выпуклого многогранника плоскостью называется многоугольник, сторонами которого является совокупность следов секущей плоскости на гранях этого многогранника.</td>
<td>

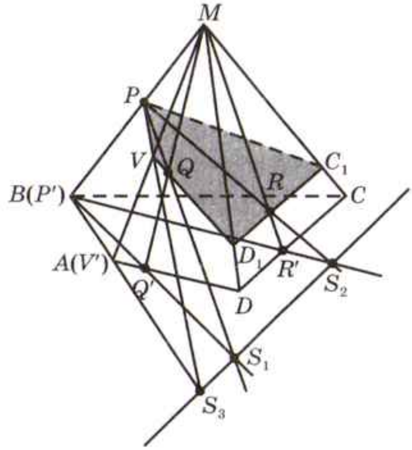
Совокупность следов B_1C_1, C_1P, PQ и QB_1 секущей плоскости на гранях пирамиды $MABC$ образуют четырехугольник B_1C_1PQ — это сечение пирамиды $MABC$.



Совокупность следов B_2C_2, C_2A_2 и A_2B_2 секущей плоскости на гранях призмы $ABCA_1B_1C_1$ образуют треугольник $A_2B_2C_2$ — это сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$.</td>
</tr>
</table>

Построение основного следа секущей плоскости	
Пример 1. На ребре MB пирамиды $MABCD$ взята точка P, а в ее гранях MAD и MCD взяты соответственно точки Q и R. Построим основной след секущей плоскости α, проходящей через точки P, Q и R. Решение. Плоскость ABC является плоскостью основания пирамиды $MABCD$. 1. Построим точки $P' = MP \cap ABC$, $Q' = MQ \cap ABC$ и $R' = MR \cap ABC$. 2. Построим точки $S_1 = PQ \cap P'Q'$ и $S_2 = PR \cap P'R'$. 3. Прямая S_1S_2 — искомый основной след секущей плоскости. **Пример 2.** На ребре BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P, а в её гранях ADD_1A_1 и BCC_1B_1 взяты соответственно точки Q и R. Построим основной след секущей плоскости α, проходящей через точки P, Q и R. Решение. Построим основной след плоскости α на плоскости нижнего основания призмы. 1. Построим точки $P' = BB_1 \cap ABC$, $Q' = q \cap ABC$ ($Q \in q$, $q \parallel AA_1$) и $R' = r \cap ABC$ ($R \in r$, $r \parallel CC_1$). 2. Построим точки $S_1 = RQ \cap R'Q'$ и $S_2 = PQ \cap P'Q'$. 3. Прямая S_1S_2 — искомый основной след плоскости α.	 
Построение сечения многогранника плоскостью, проходящей через три заданные точки	
Пример 1. На ребре MB пирамиды $MABCD$ взята точка P, а в ее	

гранях MAD и MCD взяты соответственно точки Q и R. Построим сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точки P, Q и R.



Решение.

1. Построим прямую S_1S_2 — основной след плоскости α, то есть линию ее пересечения с плоскостью ABC.

2. Построим точку пересечения прямой MA с плоскостью α. Если $MA \cap \alpha = V$, то $V' \equiv A$ и $P'V' \cap S_1S_2 = S_3$.

3. Так как $S_3 \in S_1S_2$, а $S_1S_2 \in \alpha$, то $S_3 \in \alpha$. По условию и точка $P \in \alpha$. Таким образом, точки S_3 и P принадлежат плоскости MAB. Таким образом, прямая PS_3 – след плоскости α на плоскости MAB. Найдем точку $V = PS_3 \cap MA$. Тогда отрезок PV — это след плоскости α на грани MAB.

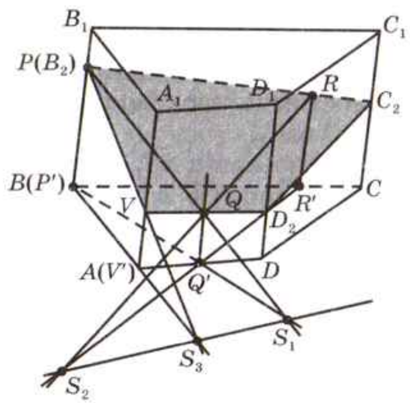
4. Прямая VQ — это след плоскости α на плоскости MAD, а отрезок $VD_1(D_1 = VQ \cap MD)$ — это след плоскости α на грани MAD.

5. Отрезок $D_1C_1(C_1 = D_1R \cap MC)$ — след плоскости α на грани MCD .

6. Отрезок PC_1 — след плоскости α на грани MBC.

Четырехугольник PVD_1C_1 — искомое сечение.

Пример 2. В гранях ABB_1A_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R. Построим сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки P, Q и R.



Решение.

1. Построим прямую S_1S_2 — основной след плоскости α на плоскости ABC.

2. Построим точку пересечения прямой AA_1 с плоскостью α. Если $AA_1 \cap \alpha = V$, то $V' \equiv A$ и $P'V' \cap PV = S_3$. Так как $S_3 \in S_1S_2$, а $S_1S_2 \in \alpha$, то $S_3 \in \alpha$. Кроме того, $S_3 \in P'V'$, то есть S_3 принадлежит плоскости ABB_1A_1. Точка P также принадлежит и плоскости α, и плоскости ABB_1A_1. Таким образом, прямая PS_3 — это след плоскости α на плоскость ABB_1A_1.

3. Находим точки $V = PS_3 \cap AA_1$ и $B_2 = PS_3 \cap BB_1$. Отрезок B_2V — след плоскости α на грани ABB_1A_1.

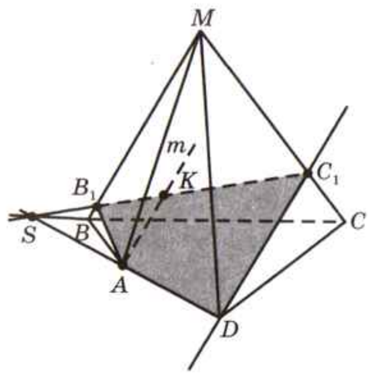
4. Прямая VQ — след плоскости α на плоскости ADD_1A_1, а отрезок $VD_2(D_2 = VQ \cap DD_1)$ — след плоскости α на грани ADD_1A_1.

5. Находим B_2C_2 и C_2D_2 — следы α на гранях BCC_1B_1 и CDD_1C_1.

Четырехугольник PVD_2C_2 — искомое сечение призмы.

Построение прямой, параллельной данной прямой

Пример 1. На ребре MC пирамиды $MABCD$ взята точка C_1. Через точку A проведем прямую, параллельную прямой C_1D.



Решение. Искомая прямая должна лежать в плоскости, проходящей через точку A и прямую C_1D.

1. Построим сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точки A, D и C_1.

2. В плоскости SC_1D через точку A проведем прямую $m \parallel C_1D$ и найдем точку $K = m \cap C_1S$.

Прямая AK — искомая.

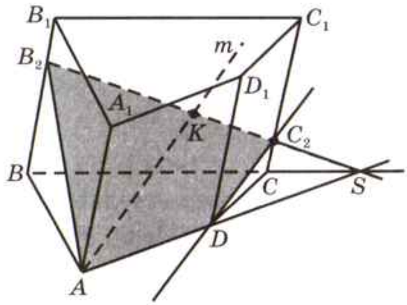
Пример 2. На ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка C_2. Через точку A проведем прямую, параллельную прямой DC_2.

Решение. Искомая прямая должна лежать в плоскости, проходящей через точку A и прямую DC_2.

1. Построим сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки A, D и C_2.

2. В плоскости ASC_2 через точку A проведем прямую $m \parallel C_2D$ и найдем точку $K = m \cap C_2S$.

Прямая AK — искомая.



Построение сечения многогранника плоскостью, проходящей через данную прямую, параллельно другой данной прямой

Пример 1. На ребрах CD и MB пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки P и B_1. Построим сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через прямую AP, параллельно прямой B_1D.

Решение.

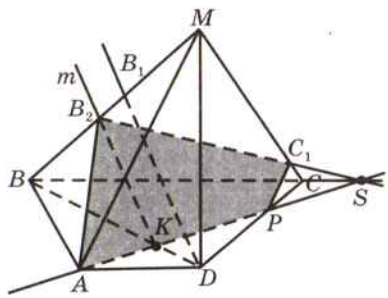
1. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через B_1D и точку M. В результате получим треугольник MDB.

2. Пусть $BD \cap AP = K$.

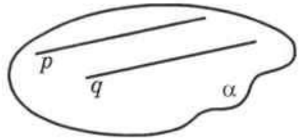
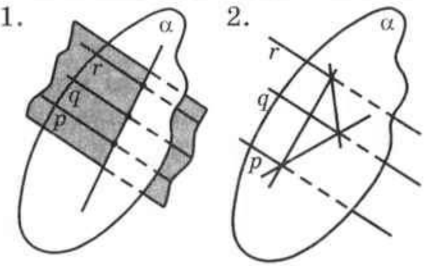
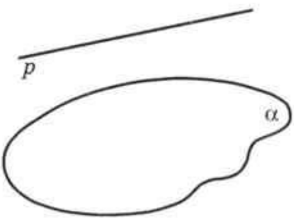
3. В плоскости MDB через точку K проведем прямую $m \parallel B_1D$ и найдем точку $B_2 = m \cap MB$.

4. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки B_2, A и P. Получим четырехугольник B_2APC_1.

Это сечение является искомым. Оно проходит через прямую AP и через прямую $B_2K \parallel B_1D$.

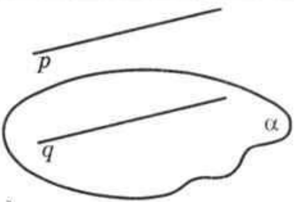


3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Параллельными прямыми называются прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Через две параллельные прямые проходит плоскость, и притом только одна.	 Если $p, q \in \alpha$ и $p \cap q = \varnothing$, то $p \parallel q$. Если $p \parallel q$, то существует единственная плоскость α такая, что $p \in \alpha$ и $q \in \alpha$.
Признак параллельности прямых Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.	 1. p, q, r лежат в одной плоскости $\left.\begin{matrix} p \parallel q \\ p \parallel r \end{matrix}\right\} \Rightarrow q \parallel r$. 2. p, q, r не лежат в одной плоскости.
Прямая называется ***параллельной плоскости*** (а плоскость параллельной прямой), если они не имеют общих точек.	 $p \parallel \alpha$

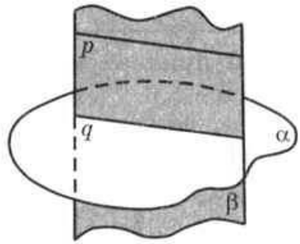
Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.



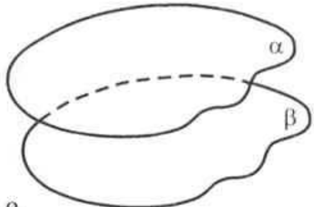
$$\left.\begin{array}{r} p \parallel q \\ q \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow p \parallel \alpha$$

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает ее, то линия пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.



$$\left.\begin{array}{l} p \parallel \alpha \\ p \in \beta \\ \beta \cap \alpha = q \end{array}\right\} \Rightarrow p \parallel q$$

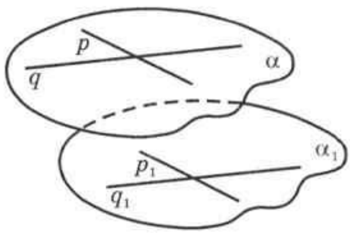
Параллельными плоскостями называются плоскости, которые не имеют общих точек.



$\alpha \parallel \beta$

Первый признак параллельности плоскостей

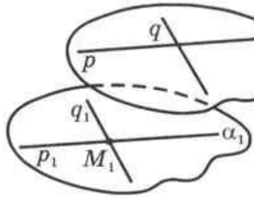
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



$$\left.\begin{array}{l} p, q \in \alpha,\ p \cap q \\ p_1 \parallel p,\ q_1 \parallel q \\ p_1, q_1 \in \alpha_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \alpha_1$$

Существование и единственность плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной плоскости.

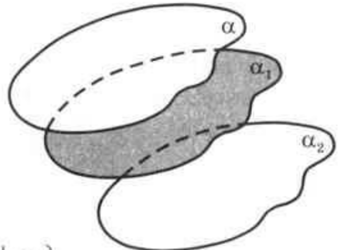
Через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной плоскости.



Если точка $M_1 \notin \alpha$, то существует единственная плоскость α_1 такая, что $M_1 \in \alpha_1$ и $\alpha_1 \parallel \alpha$.

Второй признак параллельности плоскостей

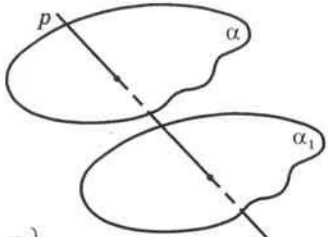
Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны.



$$\left.\begin{array}{r}\alpha \parallel \alpha_1 \\ \alpha_2 \parallel \alpha_1\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \alpha_2$$

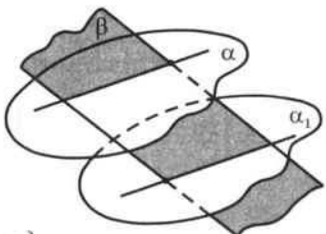
Свойства параллельных плоскостей

1. Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.



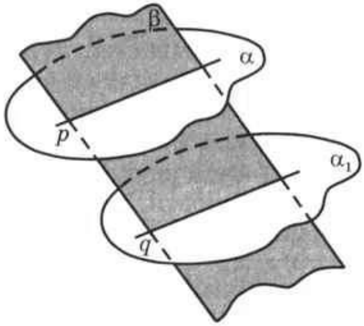
$$\left.\begin{array}{r}p \cap \alpha \\ \alpha \parallel \alpha_1\end{array}\right\} \Rightarrow p \cap \alpha_1$$

2. Если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.



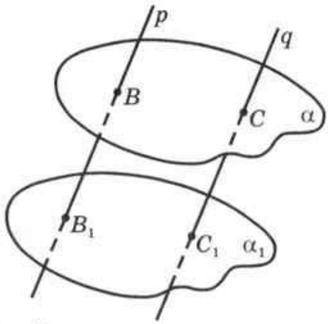
$$\left.\begin{array}{r}\beta \cap \alpha \\ \alpha \parallel \alpha_1\end{array}\right\} \Rightarrow \beta \cap \alpha_1$$

3. Если две плоскости параллельны, то и линии их пересечения третьей плоскостью параллельны.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \alpha_1 \\ \beta \cap \alpha = p \\ \beta \cap \alpha_1 = p_1\end{array}\right\} \Rightarrow p \parallel p_1$$

4. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



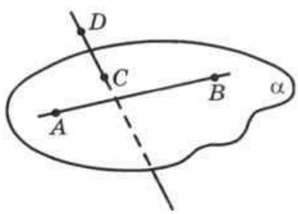
$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \alpha_1 \\ p \parallel q\end{array}\right\} \Rightarrow BB_1 = CC_1$$

4. СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

Скрещивающимися называются две прямые, которые не пересекаются и не параллельны.

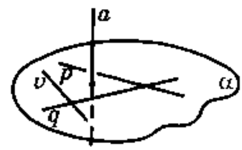
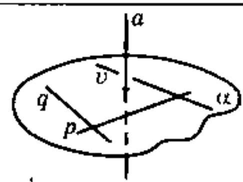
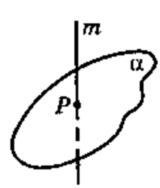
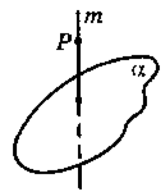
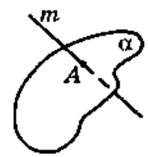
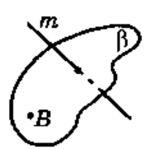
Признак скрещивающихся прямых

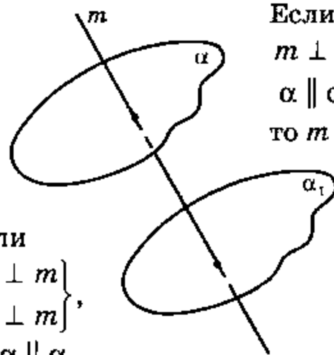
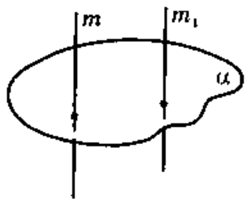
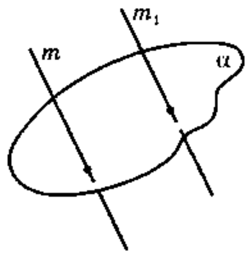
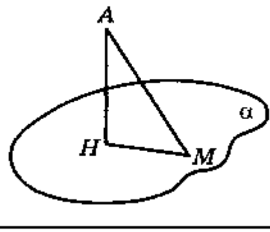
Если точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD — скрещивающиеся. (AC и BD, AD и BC — также пары скрещивающихся прямых.)

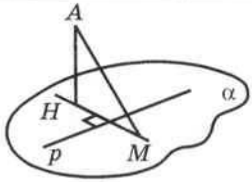
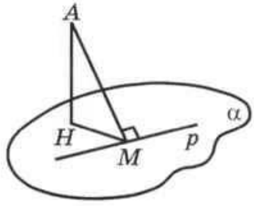
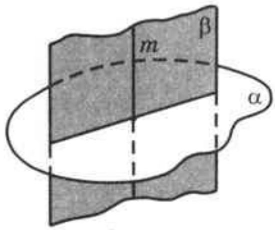
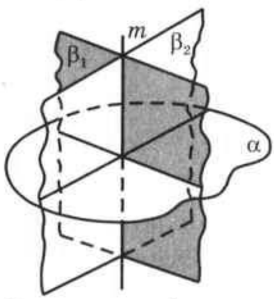


AB и CD — скрещивающиеся прямые ($AB \div CD$).

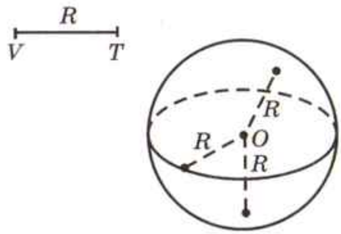
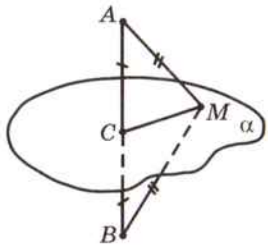
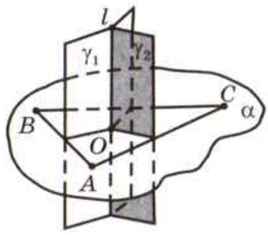
5. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

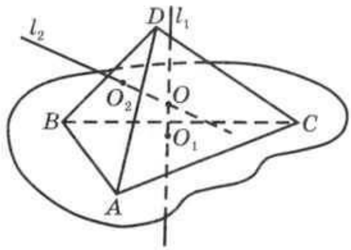
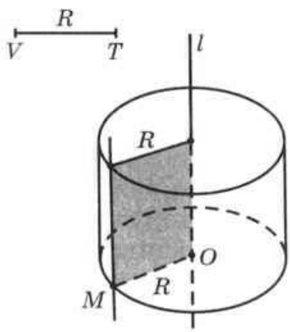
Прямая называется ***перпендикулярной плоскости***, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Если прямая перпендикулярна некоторой плоскости, то эта плоскость перпендикулярна данной прямой.	 $a \perp p,\ a \perp q,\ a \perp v,\ \ldots \Rightarrow a \perp \alpha$
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.	 Если $\begin{cases} a \perp p \\ a \perp q \end{cases}$ и $v \in \alpha$, то $a \perp v$. Если $\begin{cases} a \perp p \in \alpha \\ a \perp q \in \alpha \\ p \nparallel q \end{cases}$, то $a \perp \alpha$.
Существование и единственность прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной плоскости Через любую точку можно провести одну и только одну прямую, перпендикулярную данной плоскости.	  Если $P \in \alpha$, и если $P \notin \alpha$, то существует единственная прямая m, такая, что $P \in m$, $m \perp \alpha$.
Существование и единственность плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной прямой Через любую точку можно провести одну и только одну плоскость, перпендикулярную данной прямой.	  $A \in m$ Существует единственная плоскость α $A \in \alpha$, $\alpha \perp m$. $B \notin m$ Существует единственная плоскость β $B \in \beta$, $\beta \perp m$.

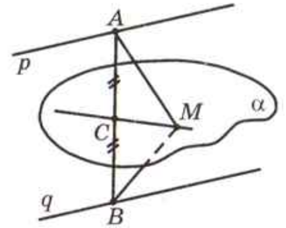
Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой. Если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.	 Если $\left.\begin{matrix}m\perp\alpha\\ \alpha\parallel\alpha_1\end{matrix}\right\}$, то $m\perp\alpha_1$. Если $\left.\begin{matrix}\alpha\perp m\\ \alpha_1\perp m\end{matrix}\right\}$, то $\alpha\parallel\alpha_1$.
Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны. Если точка A не лежит в плоскости α, а AH — перпендикуляр к плоскости α, и точка M — отличная от H точка плоскости α, то отрезок AM называется ***наклонной*** к плоскости α, а отрезок HM — проекцией наклонной AM на плоскость α.	 Если $m\parallel m_1$ и $m\perp\alpha$, то $m_1\perp\alpha$.  Если $\begin{cases}m\perp\alpha\\ m_1\perp\alpha\end{cases}$, то $m\parallel m_1$. 

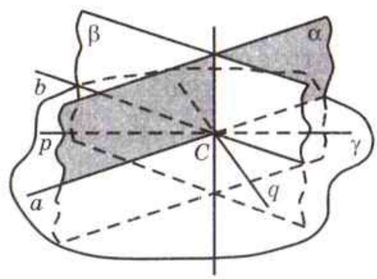
Если проекция наклонной к плоскости перпендикулярна прямой, лежащей в плоскости, то и наклонная перпендикулярна этой прямой.	 Если $\left.\begin{matrix} HM \perp p \\ p \in \alpha \end{matrix}\right\}$, то $AM \perp p$.
Если наклонная перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и проекция наклонной на эту плоскость перпендикулярна той же прямой.	 Если $\left.\begin{matrix} AM \perp p \\ p \in \alpha \end{matrix}\right\}$, то $HM \perp p$.
Признак перпендикулярности плоскостей Плоскость, которая проходит через прямую, перпендикулярную данной плоскости, также перпендикулярна данной плоскости.	 Если $\left.\begin{matrix} m \perp \alpha \\ m \in \beta \end{matrix}\right\}$, то $\beta \perp \alpha$.
Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то и линия пересечения этих плоскостей перпендикулярна третьей плоскости.	 Если $\left.\begin{matrix} \beta_1 \perp \alpha \\ \beta_2 \perp \alpha \\ \beta_1 \cap \beta_2 = m \end{matrix}\right\}$, то $m \perp \alpha$.

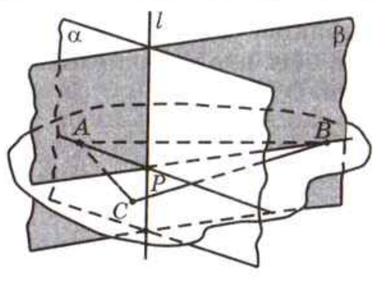
6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

Множество точек пространства, удаленных от данной точки на расстояние, равное длине данного отрезка, есть сфера с центром в данной точке и радиусом, равным длине данного отрезка.	 O — данная точка, VT — данный отрезок, его длина равна R. $\Omega(O; R)$ — сфера с центром в точке O и радиусом R.
Множество точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, проходящая через середину отрезка с концами в данных точках перпендикулярно прямой, которой принадлежат данные точки.	 Точки A и B — данные точки, точка C — середина отрезка AB. Плоскость α — это множество всех точек M, для которых выполняется равенство $AM = MB$.
Множество точек пространства, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой, есть прямая, перпендикулярная плоскости, в которой лежат данные точки, проходящая через центр окружности, которую можно описать около треугольника с вершинами в данных точках.	 Точки A, B и C — данные точки, не лежащие на одной прямой. α — плоскость, проходящая через точки A, B и C. Плоскость γ_1 — множество точек, равноудаленных от точек A и B, плоскость

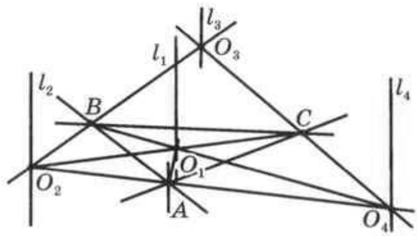
	γ_2 — множество точек, равноудаленных от точек A и C. Прямая $l = \gamma_1 \cap \gamma_2$ — множество точек, равноудаленных от точек A, B и C. Точка $O = l \cap \alpha$ — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
Множество точек пространства, равноудаленных от четырех данных точек, не лежащих в одной плоскости, есть точка, являющаяся центром сферы, проходящей через эти четыре точки.	 Точки A, B, C и D — данные точки. Прямая l_1 — множество точек, равноудаленных от точек A, B и C. Прямая l_2 — множество точек, равноудаленных от точек A, B и D. Точка $O = l_1 \cap l_2$ равноудалена от всех четырех данных точек, то есть точка O – центр сферы, проходящей через эти точки.
Множество точек пространства, удаленных от данной прямой на расстояние, равное длине данного отрезка, есть цилиндрическая поверхность, радиус которой равен длине данного отрезка, а осью является данная прямая.	 VT — данный отрезок, $VT = R$, l — данная прямая. Для любых точек O и M $O \in l$, $OM = R$, $OM \perp l$.

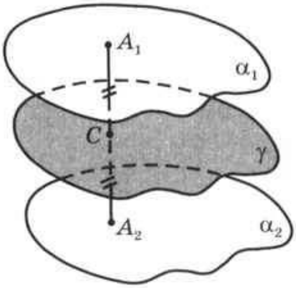
<table>
<tr>
<td>Множество точек пространства, равноудаленных от двух данных параллельных прямых, есть плоскость, проходящая через середину их общего перпендикуляра и перпендикулярная ему.</td>
<td>


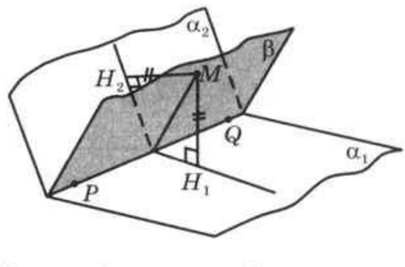
Прямые p и q — данные параллельные прямые, $A \in p$, $B \in q$, $AB \perp p$.
Точка C — середина отрезка AB, $C \in \alpha$.
Для любой точки M плоскости α $CM \perp AB$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Множество точек пространства, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть пара плоскостей, перпендикулярных плоскости этих прямых и проходящих через биссектрисы углов, образованных этими прямыми.</td>
<td>


p и q — данные пересекающиеся прямые, γ — плоскость, определяемая прямыми p и q, a и b — биссектрисы углов, образованных прямыми p и q, α и β — плоскости, перпендикулярные плоскости γ, и проходящие соответственно через a и b.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Множество точек пространства, равноудаленных от сторон данного треугольника, есть прямая, перпендикулярная плоскости треугольника, проходящая через центр вписанной в этот треугольник окружности.</td>
<td>


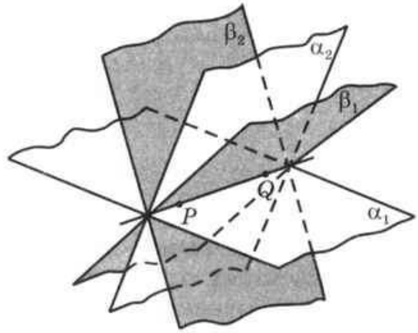
</td>
</tr>
</table>

	Точка P — точка пересечения биссектрис углов A, B и C треугольника ABC. Плоскость α проходит через биссектрису AP угла A перпендикулярно плоскости ABC. Плоскость β проходит через биссектрису BP угла B перпендикулярно плоскости ABC. Прямая $l = \alpha \cap \beta$.
Множество точек пространства, равноудаленных от прямых, на которых лежат стороны треугольника, есть четыре прямые, перпендикулярные плоскости, содержащей данные прямые, и проходящие при этом через центры окружностей: вписанной и трех вневписанных в этот треугольник.	 AB, BC и AC — данные прямые. O_1, O_2, O_3 и O_4 — центр вписанной и трех вневписанных в ΔABC окружностей. Прямые l_1, l_2, l_3, и l_4 перпендикулярны плоскости треугольника ABC и проходят соответственно через точки O_1, O_2, O_3 и O_4.
Множество точек пространства, удаленных от данной плоскости на расстояние, равное длине данного отрезка, есть две параллельные ей плоскости.	 VT — данный отрезок, длина которого равна a, α — данная плоскость.

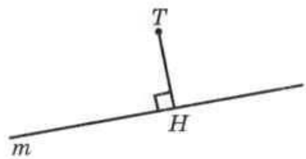
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Прямая m перпендикулярна плоскости α.
$B \in \alpha$, $B \in m$, $C_1C_2 \in m$, $BC_1 = BC_2$.
Плоскости γ_1 и γ_2 проходят соответственно через точки C_1 и C_2 параллельно плоскости α.</td>
</tr>
<tr>
<td>Множество точек пространства, равноудаленных от двух данных параллельных плоскостей, есть параллельная им плоскость, проходящая через середину любого общего перпендикуляра данных плоскостей.</td>
<td>


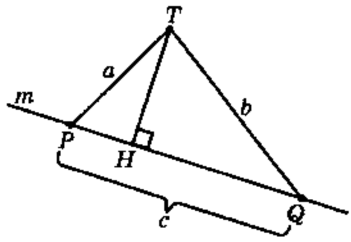
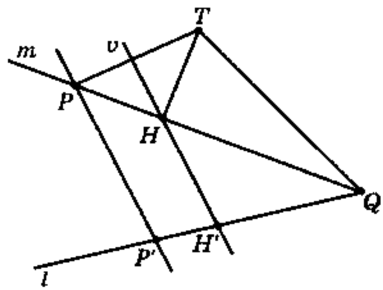
α_1 и α_2 — данные плоскости.
$A_1 \in \alpha_1$, $A_2 \in \alpha_2$, $A_1A_2 \perp \alpha_1$.
Точка C — середина A_1A_2. Плоскость $C \in \gamma$ и $\gamma \parallel \alpha_1$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Множество точек пространства, равноудаленных от граней данного двугранного угла, есть биссекторная полуплоскость этого угла.</td>
<td>


Угол, образованный полуплоскостями α_1 и α_2 с общей границей PQ — данный двугранный угол. Точка M — точка полуплоскости β, $MH_1 \perp \alpha_1$, $MH_2 \perp \alpha_2$, $MH_1 = MH_2$, то β — биссекторная полуплоскость двугранного угла H_2PQH_1.</td>
</tr>
</table>

Множество точек пространства, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей, есть пара биссекторных плоскостей, проходящих через линию пересечения данных плоскостей.	 α_1 и α_2 — две данные плоскости. Ими образуются четыре двугранных угла. Каждый из этих двугранных углов делится пополам одной из полуплоскостей, принадлежащих либо плоскости β_1, либо плоскости β_2.

7. РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Расстояние между двумя данными точками — это неотрицательное число, равное длине отрезка, соединяющего данные точки.	 $\rho(A, B) = AB$
Расстояние от данной точки до данной прямой, не проходящей через данную точку, — это длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.	 $T \notin m$, $\rho(T, m) = TH$, $TH \perp m$, $H \in m$.

Задача 1. ***Опустить перпендикуляр из данной точки T на данную прямую m.***	
План построения в общем виде 1. На прямой m выберем какие-нибудь две точки, например P и Q. Соединим их с точкой T. 2. Подсчитаем стороны треугольника TPQ. Пусть для краткости $TP = a$, $TQ = b$, $PQ = c$. 3. Если TH — высота треугольника TPQ, то выражая TH^2 двумя способами, получим: *1 способ.* Из прямоугольного треугольника TPH: $$TH^2 = a^2 - PH^2 \qquad (1)$$ *2 способ.* Из прямоугольного треугольника TQH: $$TH^2 = b^2 - QH^2 \qquad (2)$$ Сравнивая выражения (1) и (2), получаем равенство $$a^2 - PH^2 = b^2 - QH^2 \qquad (*)$$ Если вычисления сторон треугольника TPQ показали, что $a < b$, то ясно, что и $PH < QH$, и тогда в равенстве (*) сделаем замену: $PH^2 = (c - QH)^2$. Из полученного в результате этой замены уравнения $$a^2 - (c - QH)^2 = b^2 - QH^2$$ найдем QH. Пусть $QH = q$. 4. Найдем далее отношение $QH : QP$. Получаем $$QH : QP = q : c.$$ Воспользуемся для построения точки H тем, что при параллельном проектировании отношение длин параллельных отрезков сохраняется, и выполним построение:	 

а) проведем через точку Q луч l (произвольный, не лежащий на прямой m) и отложим на нем от точки Q отрезки $QH' = kq$ и $QP' = kc$, где $k > 0$. (Обычно оказывается целесообразным брать $k = 1$);

б) построим прямую $P'P$, через точку H' проведем прямую $v \parallel P'P$ и найдем точку $H = v \cap m$.

Ясно, что по теореме Фалеса

$$\frac{QH}{QP} = \frac{QH'}{QP'}, \text{ или } \frac{QH}{QP} = \frac{q}{c},$$

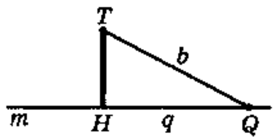
то есть точка H — это основание искомого перпендикуляра TH. Проведем его.

Расстояние от данной точки T до данной прямой m

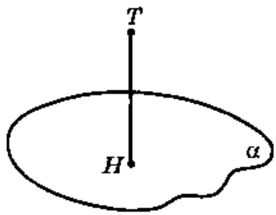
Общий план вычисления

1. Выполним построения, указанные в пунктах 1, 2, 3 задачи 1.

2. Зная расстояние $QH = q$, найдем, что $TH = \sqrt{TQ^2 - QH^2} = \sqrt{b^2 - q^2}$.



Расстояние от данной точки до данной плоскости, не проходящей через данную точку, — это длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.



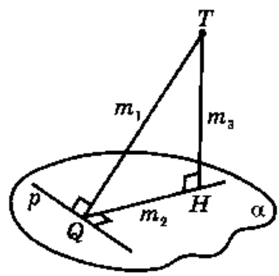
$T \notin \alpha$, $\rho(T, \alpha) = TH$, $TH \perp \alpha$, $H \in \alpha$.

Задача 2. ***Опустить перпендикуляр из данной точки T на данную плоскость α.***

План построения в общем виде

1. На плоскости α выберем какую-нибудь прямую p, и из данной точки T опустим на эту прямую перпендикуляр m_1. Пусть $m_1 \cap p = Q$.

2. В плоскости α через точку Q проведем прямую $m_2 \perp p$.



<table>
<tr>
<td>

3. Из данной точки T опустим перпендикуляр m_3 на прямую m_2. Пусть $m_3 \cap m_2 = H$.

Перпендикуляр TH является искомым перпендикуляром к данной плоскости α.

Действительно, так как по построению $p \perp m_1$ и $p \perp m_2$, то прямая p перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости, определяемой пересекающимися прямыми m_1 и m_2.

В частности, $p \perp m_3$.

Таким образом, $m_3 \perp m_2$ по построению и $m_3 \perp p$ по доказанному выше. Значит, $m_3 \perp \alpha$, то есть TH — искомый перпендикуляр.

Если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

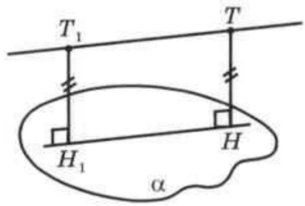
Расстояние от данной точки T до данной плоскости α

Общий план вычисления

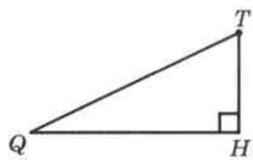
1. Выполним построения, указанные в пунктах 1, 2 и 3 задачи 2.

2. Подсчитаем расстояния TQ и QH от точки T соответственно до прямой. Искомое расстояние $TH = \sqrt{TQ^2 - QH^2}$.

</td>
<td>



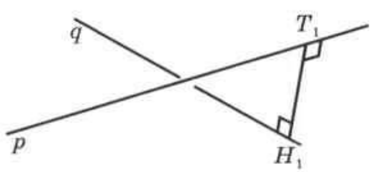
Если $m \parallel \alpha$ и $TH \perp \alpha$, $T_1H_1 \perp \alpha$, то $T_1H_1 = TH$.



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра этих прямых.

</td>
<td>



Пусть p и q — скрещивающиеся прямые.

Если $T_1H_1 \perp p$, $T_1H_1 \perp q$, $T_1 \in p$, $H_1 \in q$, то T_1H_1 — общий перпендикуляр p и q.

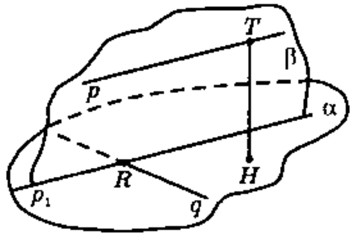
</td>
</tr>
</table>

Расстояние между данными скрещивающимися прямыми p и q

Общий план вычисления

1. На одной из данных прямых, например на q, выберем какую-нибудь точку R и проведем плоскость β, определяемую прямой p и точкой R.

2. В плоскости β через точку R проведем прямую $p_1 \parallel p$.



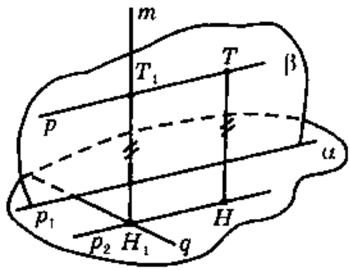
3. Пересекающимися прямыми p_1 и q определяется плоскость α. Проведем ее. Так как $p \parallel p_1$, то $p \parallel \alpha$. Поэтому расстояние от любой точки прямой p до плоскости α одно и то же.

4. Выберем на прямой p какую-нибудь точку T и опустим из нее перпендикуляр TH на плоскость α. Найдем длину отрезка TH. Его длина равна искомому расстоянию.

Длина отрезка TH равна расстоянию от точки T до плоскости α.

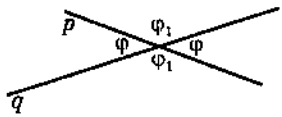
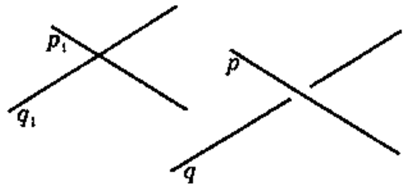
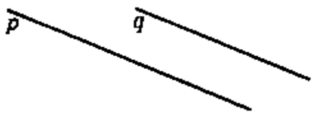
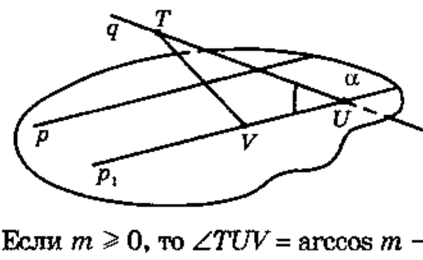
(Чтобы убедиться в этом, выполним еще некоторые построения:

в плоскости α через точку H проведем прямую $p_2 \parallel p_1$; найдем точку $H_1 = p_2 \cap q$. В плоскости, определяемой параллельными прямыми p и p_2 через точку H_1 проведем прямую $m \parallel TH$; найдем точку $T_1 = m \cap p$. Из построения ясно, что T_1H_1 — общий перпендикуляр прямых p и q, причем $TH = T_1H_1$).



T_1H_1 — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых p и q и $TH = T_1H_1$.

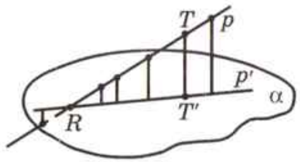
8. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении этих прямых.	 $\angle(p, q)$ — меньший из углов φ и φ_1. $0° \leqslant \angle(p, q) \leqslant 90°$.
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора пересекающихся прямых, параллельных данным скрещивающимся прямым.	 p и q — скрещивающиеся прямые, p_1 и q_1 — пересекающиеся прямые, $p_1 \parallel p$, $q_1 \parallel q$, $\angle(p, q) = \angle(p_1, q_1)$.
Угол между параллельными прямыми считается равным нулю. ***Перпендикулярными прямыми*** называются прямые, угол между которыми прямой.	 $p \parallel q \Leftrightarrow \angle(p, q) = 0°$
Угол между двумя данными скрещивающимися прямыми p и q *Общий план вычисления* 1. На одной из заданных прямых, например на q, выберем какую-нибудь точку U. 2. Через прямую p и точку U проведем плоскость α. 3. В плоскости α через точку U проведем прямую $p_1 \parallel p$. Так как $p_1 \parallel p$, то $\angle(p, q) = \angle(p_1, q)$. 4. Чтобы вычислить $\angle(p_1, q)$, возьмем, например, на прямой q точку T, а на прямой p_1 точку V. Соединим точку T с точкой V.	 Если $m \geqslant 0$, то $\angle TUV = \arccos m$ — искомый угол; если $m < 0$, то $\angle TUV$ — тупой,

5. Подсчитаем стороны треугольника TUV и по теореме косинусов $TV^2 = UT^2 + UV^2 - 2 \cdot UT \cdot UV \cdot \cos TUV$, найдем косинус угла TUV. Пусть $\cos TUV = m$. Тогда искомым является угол $\arccos |m|$.

то есть искомым является угол, равный $180° - \angle TUV$.
Но $\cos (180° - \angle TUV) = -\cos TUV = -m$. Таким образом, если $m < 0$, то искомым является угол $\arccos (-m)$.

Пусть прямая p пересекает плоскость α и не перпендикулярна ей. Тогда прямая p', на которой лежат основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой p на плоскость α, называется ***проекцией прямой p*** на эту плоскость.

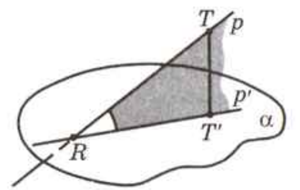


Пусть $p \cap \alpha = R$ и для любой точки $T \in p$: $TT' \perp \alpha$, $R \in \alpha$, $T' \in \alpha$, $T'R$ — проекция TR на α.

Углом между прямой p и плоскостью α называется угол между прямой p и ее проекцией на плоскость α.

Если прямая p перпендикулярна плоскости α, то угол между ними считается равным $90°$; если прямая p параллельна плоскости α, то угол между ними считается равным $0°$.

Угол между прямой и плоскостью изменяется в пределах от $0°$ до $90°$.



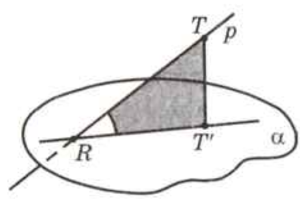
$TT' \perp \alpha \Rightarrow \angle(p, \alpha) = \angle TRT'$ — угол между прямой p и плоскостью α.

Угол между данными прямой p и плоскостью α

Общий план вычисления

1. Из какой-нибудь точки прямой p, например из точки T, опустим перпендикуляр TT' на плоскость α.

2. Проведем прямую через точку R, в которой прямая p пересекает плоскость α, и точку T'. Прямая RT' — это проекция прямой p на плоскость α. Угол между прямой p и ее проекцией на плоскость α является искомым углом.



$\operatorname{tg} TRT' = \dfrac{TT'}{RT'}$;

Подсчитаем какие-нибудь две стороны прямоугольного треугольника TRT' и найдем одну из тригонометрических функций угла TRT', а затем и сам угол TRT'.

$$\cos TRT' = \frac{RT'}{RT};$$

$$\sin TRT' = \frac{TT'}{RT}.$$

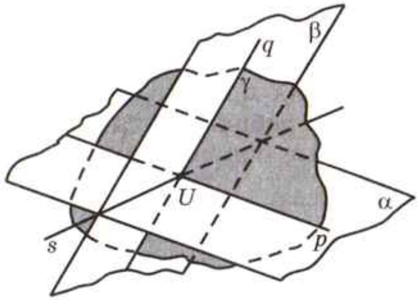
Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, получающимися при пересечении этих двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения.

Угол между параллельными плоскостями считается равным 0°.

Две плоскости называются ***перпендикулярными***, если угол между ними равен 90°.

Таким образом, если φ — угол между плоскостями, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости, перпендикулярной линии пересечения этих двух плоскостей.



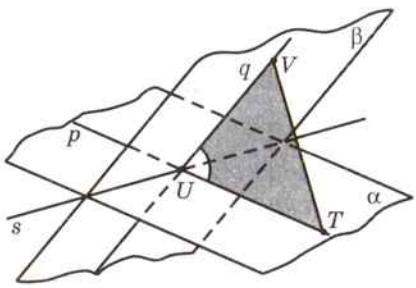
$$\left.\begin{aligned} &\gamma \perp s \\ &\gamma \cap \alpha = p \\ &\gamma \cap \beta = q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle(p, q) = \angle(\alpha, \beta)$$

Угол между данными плоскостями α и β

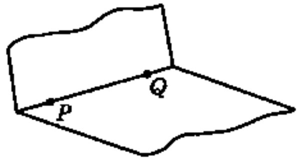
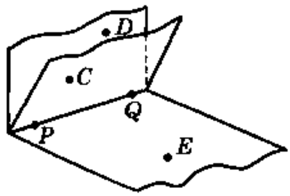
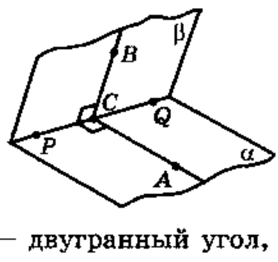
Общий план вычисления

1. Пусть линией пересечения плоскостей α и β является прямая s. Через какую-нибудь точку прямой s, например точку U, проведем в плоскостях α и β соответственно прямые p и q, причем $p \perp s$ и $q \perp s$. Так как плоскость γ, определяемая прямыми p и q, перпендикулярна прямой s, то $\angle(p, q) = \angle(\alpha, \beta)$.

2. Для вычисления $\angle(p, q)$ возьмем на прямых p и q по точке. Например, $T \in p$, $V \in q$. Соединим эти



Если $\cos TUV = m$, $m \geqslant 0$, то $\angle TUV$ является углом между

точки и подсчитаем стороны треугольника VUT, а потом и угол между прямыми p и q, то есть искомый угол.	прямыми p и q и между плоскостями α и β. Таким образом, $\angle(\alpha, \beta) = \arccos m$. Если $\cos VUT = m$, $m < 0$, то $\angle VUT$ — тупой. Тогда $\angle(p, q) = \angle(\alpha, \beta) = \arccos(-m)$.
Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, не принадлежащими одной плоскости, с общей ограничивающей их прямой. Эта прямая называется ***ребром*** двугранного угла, а указанные полуплоскости — его ***гранями***. Если некоторая прямая является ребром одного двугранного угла, то этот угол можно обозначать теми же буквами, которыми обозначено его ребро. В тех случаях, когда два или несколько двугранных углов имеют общее ребро, в обозначении каждого двугранного угла указывают сначала точку, лежащую в одной из его граней, затем указывают ребро этого угла и далее какую-нибудь точку, лежащую во второй его грани. ***Линейным углом*** двугранного угла называется угол, который получается в сечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. ***За меру двугранного угла*** принимается мера его линейного угла. Мера двугранного угла не зависит от выбора его линейного угла. Величина двугранного угла находится в пределах от 0° до 180°: $0° < \angle(BPQA) < 180°$.	 Двугранный угол PQ.  Двугранные углы $DPQC$, $DPQE$, $CPQE$.  $\angle PQ$ — двугранный угол, $\left.\begin{array}{l} BC \perp PQ,\ BC \in \beta \\ AC \perp PQ,\ AC \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BCA$ — линейный угол двугранного угла PQ.

Построение линейного угла данного двугранного угла можно выполнить, например, так:

1 способ

1. $M \in \beta$, $MD \perp PQ$, $D \in PQ$;
2. $DE \perp PQ$, $E \in \alpha$.

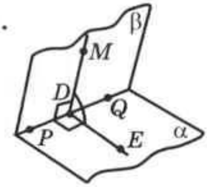
$\angle MDE$ — линейный угол двугранного угла PQ.

2 способ

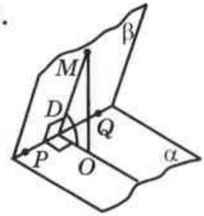
1. $M \in \beta$, $MD \perp PQ$; $D \in PQ$;
2. $MO \perp \alpha$, $O \in \alpha$;
3. OD.

$\angle MDO$ — линейный угол двугранного угла PQ.

1.



2.



9. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Правильным многогранником называется такой выпуклый многогранник, все грани которого являются равными правильными многоугольниками и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Если многогранник правильный, то:

— все его ребра равны друг другу;

— все его двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром, равны друг другу.

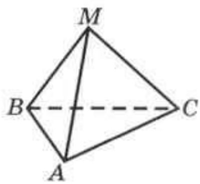
Существует только пять видов правильных многогранников: правильный тетраэдр; правильный гексаэдр; правильный октаэдр; правильный додекаэдр; правильный икосаэдр.

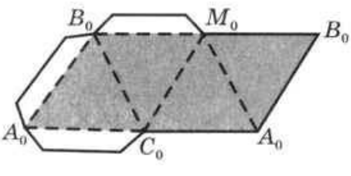
Правильный тетраэдр имеет

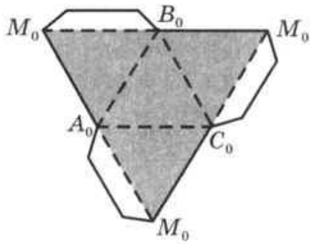
4 грани (это 4 равных правильных треугольника),

4 вершины (в каждой из них сходится по 3 ребра),

6 ребер.

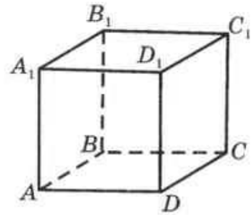


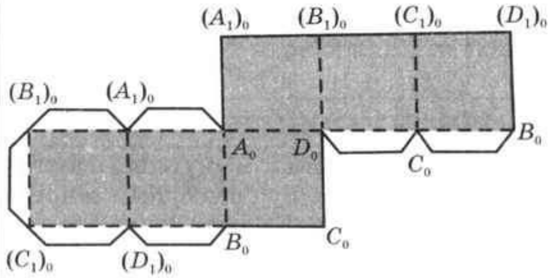


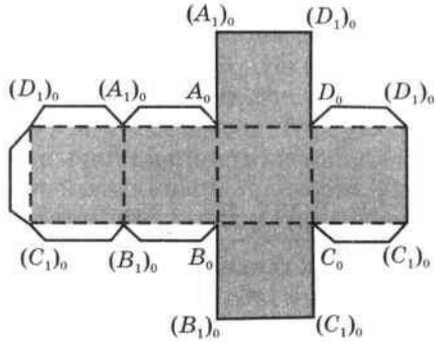


Некоторые варианты развертки модели правильного тетраэдра.

Правильный гексаэдр (куб) имеет
6 граней (это 6 равных квадратов),
8 вершин (в каждой из них сходится по 3 ребра),
12 ребер.

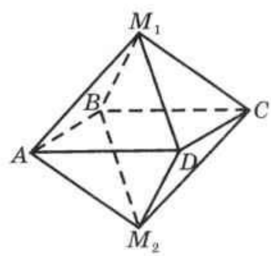


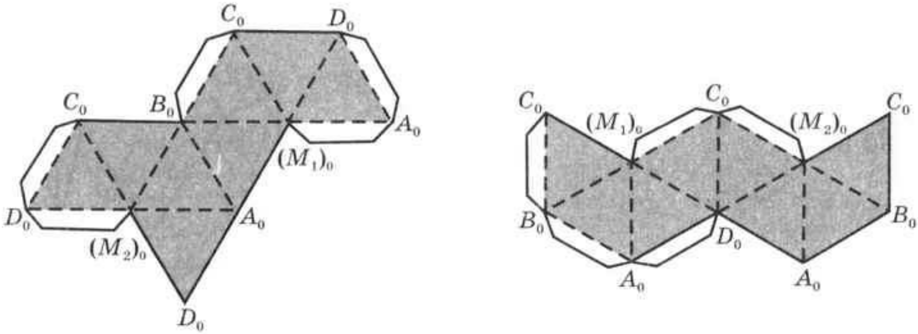




Некоторые варианты развертки модели правильного гексаэдра (куба).

Правильный октаэдр имеет
8 граней (это 8 равных правильных треугольников),
6 вершин (в каждой из них сходится по 4 ребра),
12 ребер.





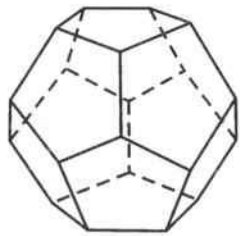
Некоторые варианты развертки модели правильного октаэдра.

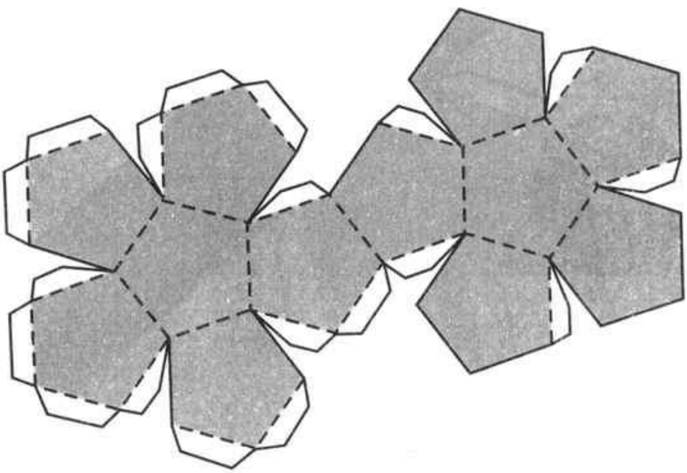
Правильный додекаэдр имеет

12 граней (это 12 равных правильных пятиугольников),

20 вершин (в каждой из них сходится по 3 ребра),

30 ребер.





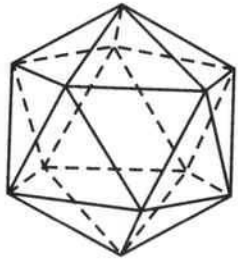
Один из вариантов развертки модели правильного додекаэдра.

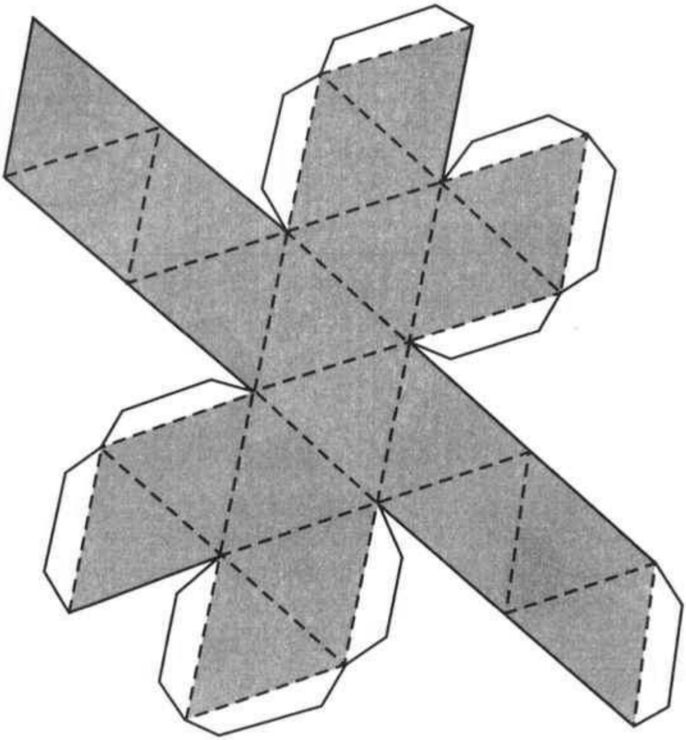
Правильный икосаэдр имеет

20 граней (это 20 равных правильных треугольников),

12 вершин (в каждой из них сходится по 5 ребер),

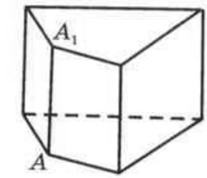
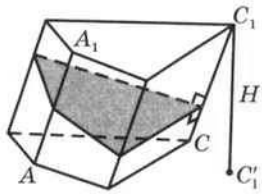
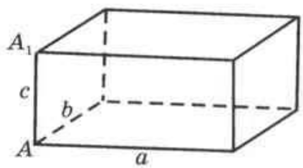
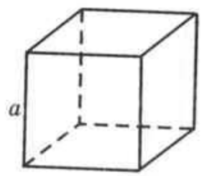
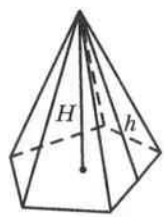
30 ребер.

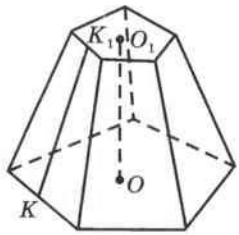
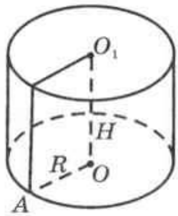
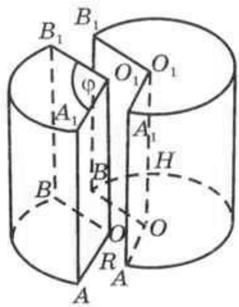


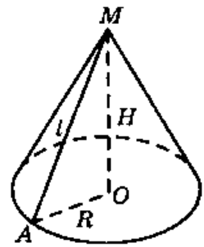
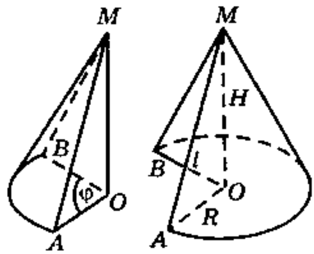
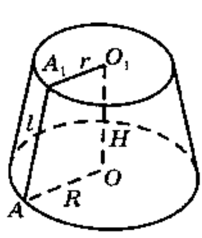


Один из вариантов развертки модели правильного икосаэдра.

10. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ ТЕЛ

Прямая призма 1. $S_{бок} = P_{осн} \cdot AA_1$ ($P_{осн}$ — периметр основания). 2. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$. 3. $V = S_{осн} \cdot AA_1$.	
Наклонная призма 1. $S_{бок} = P_{сеч} \cdot AA_1$ ($P_{сеч}$ — периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру). 2. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$. 3. $V = S_{осн} \cdot H$ (H — высота призмы).	
Прямоугольный параллелепипед 1. $S_{бок} = P_{осн} \cdot AA_1 = 2(a + b)c$. 2. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2(ab + bc + ca)$. 3. $V = abc$.	
Куб 1. $S_{бок} = 4a^2$. 2. $S_{полн} = 6a^2$. 3. $V = a^3$.	
Пирамида 1. $S_{бок} = ph$ (p — полупериметр основания, h — апофема). 2. $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$. 3. $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$ (H — высота пирамиды).	

Усеченная пирамида 1. $S_{бок} = (p_1 + p_2)KK_1$. 2. $S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2$ (S_1 и S_2 — площади оснований). 3. $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)H$ (H — высота усеченной пирамиды).	 p_1 и p_2 — полупериметры оснований, KK_1 — апофема, OO_1 — высота усеченной пирамиды.
Цилиндр 1. $S_{бок} = 2\pi RH$ (R — радиус оснований, H — высота цилиндра). 2. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$. 3. $V = \pi R^2 H$.	 $OA = R$ — радиус основания, $OO_1 = H$ — высота цилиндра.
Доля цилиндра (с центральным углом φ) 1. $S_{бок} = \pi RH\frac{\varphi}{180} + 2S_{AA_1O_1O} = \frac{\pi RH\varphi}{180} + 2RH$. 2. $S_{осн} = \pi R^2\frac{\varphi}{360}$. 3. $S_{полн} = \frac{\pi RH\varphi}{180} + 2RH + \frac{\pi R^2\varphi}{180} = \frac{\pi R\varphi}{180}(H + R) + 2RH$. 4. $V = \pi R^2 H\frac{\varphi}{360}$.	 $OA = R$ — радиус основания цилиндра, $\angle AOB = \varphi$ — центральный угол доли цилиндра, $OO_1 = H$ — высота цилиндра.

Конус 1. $S_{бок} = \pi Rl$. 2. $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$. 3. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.	 $OA = R$ — радиус основания конуса, $MO = H$ — высота конуса, $MA = l$ — образующая конуса.
Доля конуса (с центральным углом φ) 1. $S_{бок} = \pi Rl \dfrac{\varphi}{360} + 2S_{MOA} = \dfrac{\pi Rl\varphi}{360} + RH$. 2. $S_{осн} = \dfrac{\pi R^2\varphi}{360}$. 3. $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \dfrac{\pi R\varphi}{360}(l + R) + RH$. 4. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H \dfrac{\varphi}{360}$.	 $MA = l$ — образующая конуса, $OA = R$ — радиус основания, $MO = H$ — высота конуса, $\angle AOB = \varphi$ — центральный угол доли конуса.
Усеченный конус 1. $S_{бок} = \pi(R + r)l$. 2. $S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2 = \pi(r + R)l + \pi(R^2 + r^2)$, где S_1 и S_2 — площади оснований. 3. $V = \dfrac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$.	 $AA_1 = l$ — образующая, $OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований, $OO_1 = H$ — высота усеченного конуса.

<table>
<tr>
<td>

Доля усеченного конуса (с центральным углом φ)

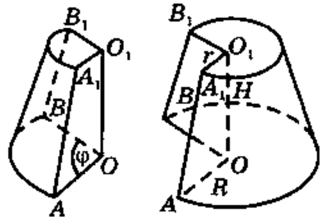
1. $S_{бок} = \dfrac{\pi(R + r)l \cdot \varphi}{360} + (R + r)H = (R + r)\left(\dfrac{\pi l\varphi}{360} + H\right).$

2. $S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2 = \dfrac{\pi(R + r)l \cdot \varphi}{360} + (R + r)H + \dfrac{\pi(R^2 + r^2)\varphi}{360},$

где S_1 и S_2 — площади оснований.

3. $V = \pi H(R^2 + Rr + r^2)\dfrac{\varphi}{1080}.$

</td>
<td>



$AA_1 = l$ — образующая, $OA = R$ — радиус большего основания и $O_1A_1 = r$ — радиус меньшего основания, $OO_1 = H$ — высота усеченного конуса, $\angle AOB = \varphi$ — центральный угол доли усеченного конуса.

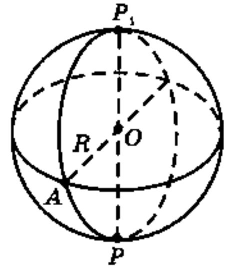
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Шар

1. $S = 4\pi R^2.$

2. $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3.$

</td>
<td>



$OA = R$ — радиус шара.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

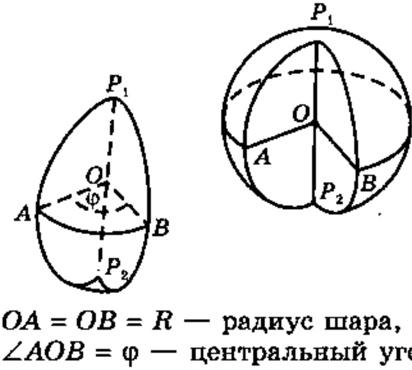
Доля шара (с центральным углом φ)

1. $S_{бок} = 4\pi R^2 \dfrac{\varphi}{360} = \dfrac{\pi R^2\varphi}{90}.$

2. $S_{полн} = \dfrac{\pi R^2\varphi}{90} + \pi R^2 = \dfrac{\pi R^2(90 + \varphi)}{90}.$

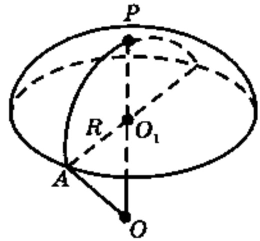
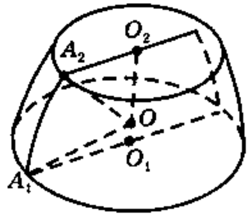
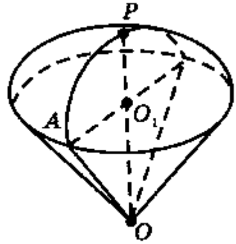
3. $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \cdot \dfrac{\varphi}{360} = \dfrac{\pi R^3\varphi}{270}.$

</td>
<td>

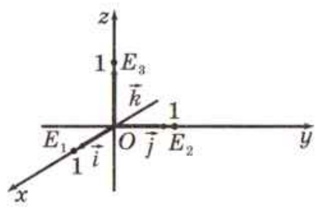
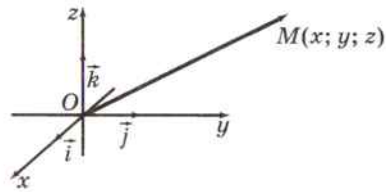
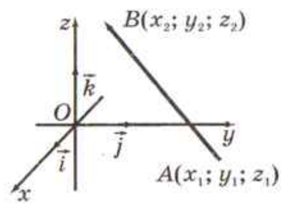


$OA = OB = R$ — радиус шара, $\angle AOB = \varphi$ — центральный угол доли шара.

</td>
</tr>
</table>

Шаровой сегмент 1. $S_{бок} = 2\pi RH$. 2. $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = 2\pi RH + \pi r^2$. 3. $V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$.	 $OA = R$ — радиус шара, $O_1A = r$ — радиус основания сегмента, $O_1P = H$ — высота сегмента.
Шаровой слой 1. $S_{бок} = 2\pi RH$. 2. $S_{полн} = 2\pi RH + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$. 3. $V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right) = \frac{1}{6}\pi H(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$.	 $OA_1 = R$ — радиус шара, $O_1A_1 = r_1$ и $O_2A_2 = r_2$ — радиусы оснований шарового сегмента, $O_1O_2 = H$ — высота слоя.
Шаровой сектор 1. $S_{полн} = \pi R\left(2H + \sqrt{2RH - H^2}\right)$. 2. $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.	 $OA = R$ — радиус шара, $O_1P = H$ — высота шарового сегмента.

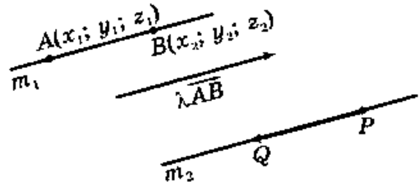
11. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ точки E_1, E_2 и E_3 имеют координаты соответственно (1; 0; 0), (0; 1; 0) и (0; 0; 1), то векторы $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$ и $\vec{k} = \overrightarrow{OE_3}$ называются ***координатными векторами*** этой системы координат. Таким образом, если векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ являются координатными, то $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ и $\lvert\vec{i}\rvert = \lvert\vec{j}\rvert = \lvert\vec{k}\rvert = 1$. ***Любой вектор $\overrightarrow{OM}$ может быть единственным образом разложен по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ прямоугольной системы координат $Oxyz$.*** Если M имеет координаты $(x; y; z)$, то вектор $OM = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, или короче $\overrightarrow{OM}(x; y; z)$. Коэффициенты x, y и z этого разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ называются **координатами вектора** $\overrightarrow{OM}$. Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, или короче: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.	  
Если векторы равны, то их соответственные координаты равны.	Если $\vec{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2; z_2)$ — равные векторы ($\vec{p} = \vec{q}$), то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$.
Координаты суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат этих векторов. Координаты разности двух векторов равны разности соответствующих координат этих векторов.	Если $\vec{s} = \vec{p} + \vec{q}$, где $\vec{s}(x; y; z)$, $\vec{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2; z_2)$, то $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $z = z_1 + z_2$, т. е. $\vec{s}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$. Аналогично, если $\vec{r} = \vec{p} - \vec{q}$, где $\vec{s}(x; y; z)$, $\vec{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2; z_2)$, то $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, $z = z_1 - z_2$, т. е. $\vec{r}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

Координаты вектора, умноженного на число, равны произведению соответствующей координаты вектора на это число.	Если $\vec{p}(x;\ y;\ z)$, то $\lambda\vec{p}(\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z)$.
Условие коллинеарности двух векторов Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{p}$ $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{q}\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ является существование такого числа $k \neq 0$, что $x_1 = kx_2,\ y_1 = ky_2,\ z_1 = kz_2$.	Если $\vec{p}(x_1;\ y_1;\ z_1) \parallel \vec{q}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то существует такое число $k \neq 0$, что $x_1 = kx_2,\ y_1 = ky_2,\ z_1 = kz_2$, или $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$. И обратно, если векторы $\vec{p}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{q}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ таковы, что их соответствующие координаты пропорциональны, т. е. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, то $\vec{p} \parallel \vec{q}$.
Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.	Если $\vec{p}(x;\ y;\ z)$, то $\lvert\vec{p}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Если $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, то $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
Скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.	Так, если $\vec{p}(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{q}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\vec{p}\vec{q} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения.	Так, если $\vec{p}(x_1;\ y_1;\ z_1) \perp \vec{q}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$. И обратно, если координаты $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ соответственно векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ связаны равенством $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$, то $\vec{p} \perp \vec{q}$.

Направляющим вектором данной прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой.

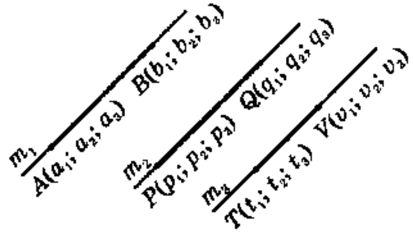
Одноименные координаты двух направляющих векторов одной прямой пропорциональны.



Если $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ — точки прямой m_1, то любой вектор

$$\lambda\overline{AB}(\lambda(x_2 - x_1); \lambda(y_2 - y_1); \lambda(z_2 - z_1))$$

$(\lambda \neq 0)$ является направляющим вектором прямой m_1. Если прямые m_1 и m_2 параллельны, то любой вектор $\overline{PQ}$ (точки P, $Q \in m_2$) является направляющим вектором прямой m_1. Точно так

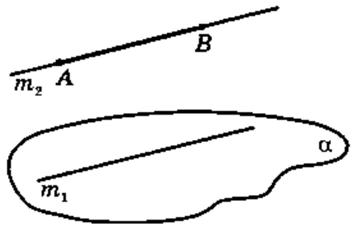


же, если $m_3 \parallel m_1$, то $\overline{TV}$ — направляющий вектор прямой m_1. Так, если прямые m_1, m_2 и m_3 параллельны, то векторы
$\overline{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$,
$\overline{PQ}(q_1 - p_1; q_2 - p_2; q_3 - p_3)$ и
$\overline{VT}(t_1 - v_1; t_2 - v_2; t_3 - v_3)$ — направляющие векторы прямых m_1, m_2 и m_3.
При этом

$$\frac{b_1 - a_1}{q_1 - p_1} = \frac{b_2 - a_2}{q_2 - p_2} = \frac{b_3 - a_3}{q_3 - p_3} \text{ и}$$

$$\frac{b_1 - a_1}{t_1 - v_1} = \frac{b_2 - a_2}{t_2 - v_2} = \frac{b_3 - a_3}{t_3 - v_3}.$$

Любой направляющий вектор прямой является и направляющим вектором плоскости, в которой эта прямая лежит.



Так, если прямые $m_2 \parallel m_1$ и $m_1 \in \alpha$, то $\overline{AB}$ — направляющий вектор прямой m_1 и m_2 является направляющим вектором и для плоскости α.

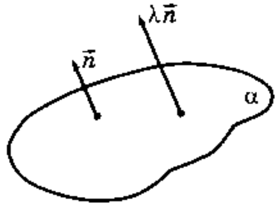
Нормальный вектор плоскости

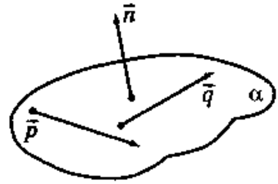
Если прямая m перпендикулярна плоскости α, то и направляющий вектор прямой m перпендикулярен плоскости α.

Нормальным вектором плоскости называется ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Если вектор $\vec{n}$ является нормальным вектором плоскости α, то и вектор $\lambda\vec{n}$ $(\lambda \neq 0)$ — нормальный вектор этой плоскости.

Если вектор $\vec{n}$ — нормальный вектор плоскости α, то он перпендикулярен любым двум направляющим векторам плоскости α.





Если $\vec{n}(n_1; n_2; n_3) \perp \alpha$, $\vec{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2; z_2)$ — направляющие векторы плоскости α, то

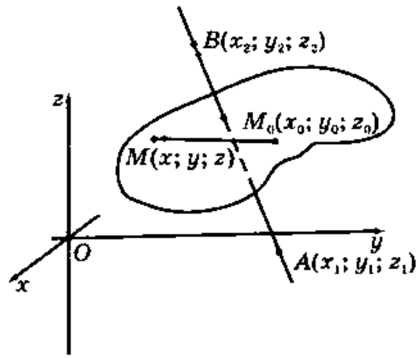
$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{p} \\ \vec{n} \perp \vec{q} \end{cases}, \text{ или}$$

$$\begin{cases} n_1x_1 + n_2y_1 + n_3z_1 = 0, \\ n_1x_2 + n_2y_2 + n_3z_2 = 0. \end{cases}$$

Составление уравнения плоскости α, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$

План решения

1. Полагая для краткости $x_2 - x_1 = n_1$, $y_2 - y_1 = n_2$ и $z_2 - z_1 = n_3$, получаем вектор $\bar{n} = \overline{AB}(n_1;\ n_2;\ n_3)$ — нормальный вектор плоскости α.
2. Пусть точка $M(x;\ y;\ z)$ — текущая точка плоскости α. Тогда $\overline{M_0M}(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$. Так как $\bar{n} \perp \alpha$, то $\bar{n} \perp \overline{M_0M}$, или $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$.
3. Переходя к координатам векторов $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$, получаем $(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$ — уравнение плоскости α.



$(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$ — уравнение плоскости α, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, перпендикулярно данной прямой AB.

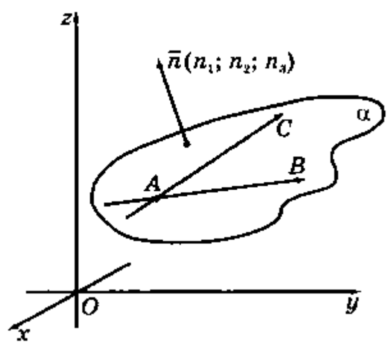
Составление уравнения плоскости α, проходящей через три данные точки A, B и C

План решения

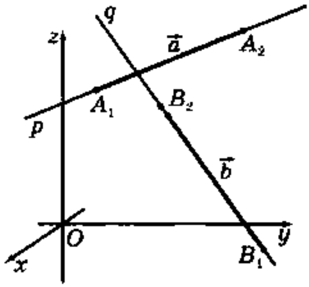
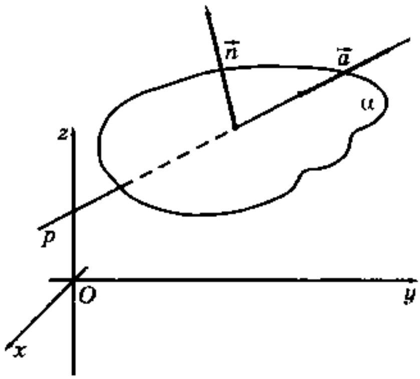
1. Найдем координаты двух неколлинеарных векторов плоскости α. Например, $\overline{AB}(a_1;\ b_1;\ c_1)$ и $\overline{AC}(a_2;\ b_2;\ c_2)$.
2. Найдем координаты какого-нибудь нормального вектора $\bar{n}(n_1;\ n_2;\ n_3)$ плоскости α. Решим относительно n_1, n_2 и n_3 систему уравнений

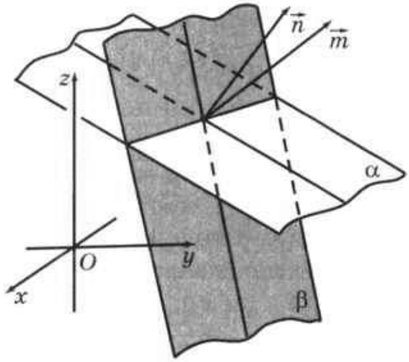
$$\begin{cases} n_1a_1 + n_2b_1 + n_3c_1 = 0, \\ n_1a_2 + n_2b_2 + n_3c_2 = 0. \end{cases}$$

3. Зная координаты $(n_1;\ n_2;\ n_3)$ нормального вектора плоскости α, составим уравнение этой плоскости, как плоскости, проходящей через одну из данных точек. Например, через точку $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$. Получаем $(x - x_1)n_1 + (y - y_1)n_2 + (z - z_1)n_3 = 0$.



$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$
$B(x_2;\ y_2;\ z_2)$
$C(x_3;\ y_3;\ z_3)$
$\overline{AB}(a_1;\ b_1;\ c_1)$
$\overline{AC}(a_2;\ b_2;\ c_2)$

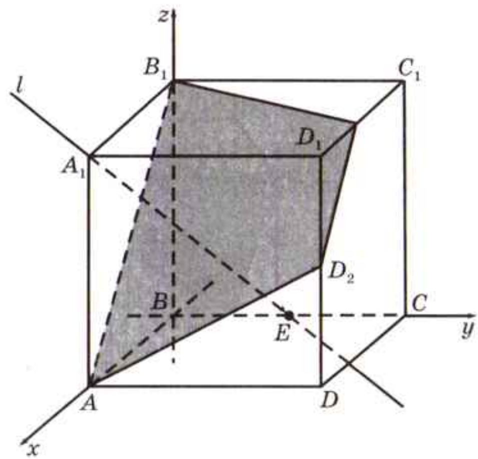
Вычисление косинуса угла между данными прямыми p и q *План решения* 1. Найдем координаты направляющих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно данных прямых p и q. (Это можно сделать, найдя координаты каких-нибудь двух точек A_1 и A_2 прямой p, и, аналогично, точек B_1 и B_2 прямой q.) Пусть $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тогда $\overline{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ или $\overline{A_1A_2}(a_1;\ a_2;\ a_3)$. Аналогично $\overline{B_1B_2}(b_1;\ b_2;\ b_3)$. 2. Тогда $\cos(p \wedge q) = \lvert\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})\rvert = \dfrac{\lvert a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.	 $\overline{A_1A_2} = \vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\overline{B_1B_2} = \vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$, $\cos(p \wedge q) = \dfrac{\lvert a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.
Вычисление синуса угла между данной прямой p и данной плоскостью α *План решения* 1. Найдем кординаты какого-нибудь направляющего вектора прямой p, например, вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$. 2. Найдем координаты какого-нибудь нормального вектора $\vec{n}$ плоскости α: $\vec{n}(n_1;\ n_2;\ n_3)$. 3. Получаем $\sin(p \wedge \alpha) = \lvert\cos(\vec{a} \wedge \vec{n})\rvert = \dfrac{\lvert a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3\rvert}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$.	

Вычисление косинуса угла между данными плоскостями α и β *План решения* 1. Найдем координаты каких-нибудь векторов $\vec{n}$ и $\vec{m}$ — нормальных векторов соответственно плоскостей α и β: $\vec{n}(n_1;\ n_2;\ n_3)$ и $\vec{m}(m_1;\ m_2;\ m_3)$. 2. Получаем $\cos(\alpha \,\hat{}\, \beta) = \lvert\cos(\vec{n} \,\hat{}\, \vec{m})\rvert =$ $= \dfrac{\lvert n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3\rvert}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}\ \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}.$	

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Пример 1. На ребре DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка D_2 — середина его. Построим прямую l, проходящую через точку A_1 перпендикулярно плоскости α, заданной точками A, B_1 и D_2.

Решение. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат, например, $Bxyz$, как показано на рисунке. В качестве единицы измерения отрезков в этой системе координат примем отрезок, равный ребру куба.



В заданной системе координат находим: $B(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 1;\ 0)$ и $B_1(0;\ 0;\ 1)$. Далее находим координаты точки D_2. Получаем $D_2\left(1;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$.

Искомая прямая l проходит через точку $A_1(1;\ 0;\ 1)$. Для построения этой прямой найдем еще какую-нибудь ее точку.

Ясно, что прямая l не параллельна координатной плоскости Bxy. Если эту плоскость прямая l пересекает в некоторой точке E, то третья координата точки E равна нулю. Таким образом, $E(x;\ y;\ 0)$.

Так как прямая A_1E перпендикулярна плоскости α, то и $\overrightarrow{A_1E} \perp \alpha$. Это значит, что вектор $\overrightarrow{A_1E}$ перпендикулярен любым двум векторам коллинеарным плоскости α. Например, $\overrightarrow{A_1E} \perp \overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{A_1E} \perp \overrightarrow{AD_2}$. Тогда

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ \overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{AD_2} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы от системы векторных уравнений (1) перейти к уравнениям относительно координат векторов $\overrightarrow{A_1E}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AD_2}$, найдем кординаты этих векторов. Получаем:

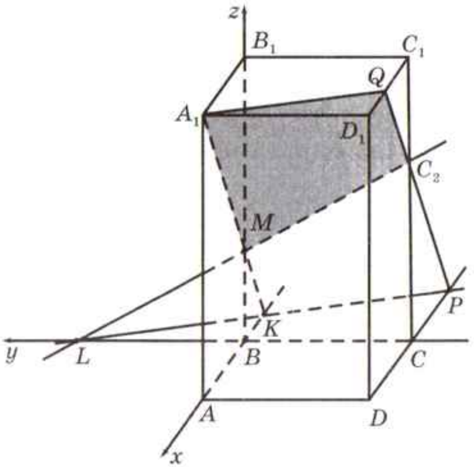
$$\overrightarrow{A_1E}\,(x - 1;\ y;\ -1);\ \overrightarrow{AB_1}(-1;\ 0;\ 1);\ \overrightarrow{AD_2}\left(0;\ 1;\ \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} (x - 1)(-1) + y \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0, \\ (x - 1) \cdot 0 + y \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, искомая прямая l проходит через точки $A_1(1;\ 0;\ 1)$ и $E\left(0;\ \frac{1}{2};\ 0\right)$. Построим точку E по ее координатам и затем проведем прямую A_1E.

Пример 2. Вершина B прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 3$ принята за начало прямоугольной системы координат $Bxyz$, как показано на рисунке. За единицу измерения отрезков в этой системе принят отрезок AB.



Построим сечение параллелепипеда плоскостью α, заданной в этой системе координат уравнением

$$4x + y - 2z + 2 = 0.$$

Решение. Находим, что в заданной системе координат: $B(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, и $B_1(0;\ 0;\ 3)$.

Для построения сечения найдем какие-нибудь три точки плоскости α, не лежащие на одной прямой. Например, точки пересечения плоскости α с осями координат.

Если плоскость α пересекает ось Bx в некоторой точке K, то $K(k;\ 0;\ 0)$. Подставив координаты точки K в уравнение плоскости α, находим, что $k = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $K\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right)$. Построим точку K по ее координатам.

Если плоскость α пересекает ось By в точке L, то $L(0;\ l;\ 0)$. Подставив координаты точки L в уравнение плоскости α, находим, что $l = -2$. Таким образом, $L(0;\ -2;\ 0)$. Построим точку L по ее координатам.

Если плоскость α пересекает ось Bz в некоторой точке M, то $M(0;\ 0;\ m)$. Подставив координаты точки M в плоскости α, находим, что $m = 1$. Построим точку $M(0;\ 0;\ 1)$ по ее координатам.

Итак, построены три точки, принадлежащие секущей плоскости α: K, L и M. Построим сечение параллелепипеда плоскостью α.

Прямая KL — основной след плоскости α. Находим, что $KL \cap DC = P$. Прямая KM — след плоскости α на плоскости ABB_1A_1. Проведя прямую KM, найдем точку пересечения ее с прямой AA_1. Точкой пересечения оказывается точка A_1. (Этот факт можно установить и непосредственно вычислениями, рассуждая так: если плоскость α пересекает прямую AA_1 в некоторой точке N, то $N(1;\ 0;\ n)$. Подставив координаты точки N в уравнение плоскости α, находим, что $n = 3$. Таким образом, $N(1;\ 0;\ 3)$. Но, как нетрудно выяснить, такие координаты имеет точка A_1. Это и означает, что точка N совпадает с точкой A_1.)

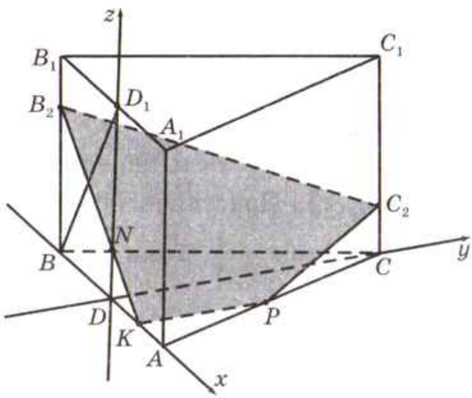
Дальнейшие шаги построения можно выполнить, воспользовавшись тем, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна плоскости ABC, и плоскость CDD_1 параллельна плоскости BAA_1. Мы же продолжим построение сечения, вычислив координаты точки пересечения плоскости α, например, с прямой CC_1.

Если плоскость α пересекает прямую CC_1 в некоторой точке C_2, то $C_2(0;\ 2;\ c)$. Подставив координаты точки C_2 в уравнение плоскости α, находим, что $c = 2$. Таким образом, $C_2(0;\ 2;\ 2)$.

Построим точку C_2 по ее координатам. Далее построим прямую PC_2 — след плоскости α на плоскости CDD_1 и найдем точку $Q = PC_2 \cap C_1D_1$.

Четырехугольник A_1QC_2M — искомое сечение.

Пример 3. Все грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ квадраты. На ребрах AC и A_1B_1 взяты соответственно точки P и D_1 — середины этих ребер. Построим сечение призмы плоскостью α, проходящей через точку P перпендикулярно прямой BD_1.



Решение. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Dxyz$ (точка D — середина ребра AB) как показано на рисунке с единицей измерения отрезков, равной половине ребра призмы.

В этой системе координат: $D(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $C\left(0;\ \sqrt{3};\ 0\right)$, $D_1(0;\ 0;\ 2)$.

Находим далее координаты точки P, через которую проходит плоскость α, и координаты какого-нибудь нормального вектора этой плоскости.

Имеем $P\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$, $B(-1;\ 0;\ 0)$, то есть $\overline{BD_1}(1;\ 0;\ 2)$. Тогда уравнение плоскости α имеет вид

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 0 + (z - 0) \cdot 2 = 0, \text{ или } 2x + 4z - 1 = 0. \qquad (2)$$

Построим сечение призмы плоскостью α.

Если плоскость α пересекает ось Dx в некоторой точке K, то $K(k;\ 0;\ 0)$. Подставив координаты точки K в уравнение (2), находим, что $k = \frac{1}{2}$.

Таким образом, $K\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right)$.

Точку пересечения плоскости α с осью Dy можно не искать, так как уже известно, что плоскость α и плоскость ABC имеют две общие точки: P и K.

Это значит, что прямая PK является основным следом плоскости α. (Как нетрудно убедиться, предположение о том, что плоскость α пересекает ось Dy в некоторой точке $L(0;\ l;\ 0)$ приводит к ложному равенству $2 \cdot 0 + 0 \cdot l + 4 \cdot 0 - 1 = 0$, то есть прямая Dy параллельна плоскости α.)

Найдем еще точку пересечения плоскости α с осью Dz. Если плоскость α пересекает Dz в некоторой точке N, то $N(0;\ 0;\ n)$. Подставив координаты точки N в уравнение (2), находим, что $n = \frac{1}{4}$. Построим точку $N\left(0;\ 0;\ \frac{1}{4}\right)$ по ее координатам и проведем прямую KN — след плоскости α на плоскости ABB_1.

Пусть $KN \cap BB_1 = B_2$. Тогда отрезок KB_2 — след плоскости α на грани ABB_1A_1. (Построение сечения можно было продолжить, найдя сначала точку $L = KP \cap BC$, затем, проведя прямую B_2L, получить точку $C_2 = B_2L \cap CC_1$, и далее четырехугольник KB_2C_2P — искомое сечение. Мы же продолжим построение сечения, вычисляя координаты точки пересечения плоскости α с прямой CC_1.)

Если плоскость α пересекает прямую CC_1 в некоторой точке C_2, то $C_2\left(0;\ \sqrt{3};\ c\right)$. Подставив координаты точки C_2 в уравнение плоскости α, находим, что $c = \frac{1}{4}$. Таким образом, $C_2\left(0;\ \sqrt{3};\ \frac{1}{4}\right)$. Построим точку C_2 по ее координатам.

Четырехугольник KB_2C_2P — искомое сечение.

Пример 4. Высота MO правильной пирамиды $MABCD$ равна половине диагонали ее основания. На ребрах CD и MB взяты соответственно точки P и B_1 — середины этих ребер. Построим сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку P параллельно прямым AB_1 и MC.

Решение. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$, как показано на рисунке. В качестве единицы измерения отрезков в этой системе координат примем отрезок, равный высоте пирамиды.

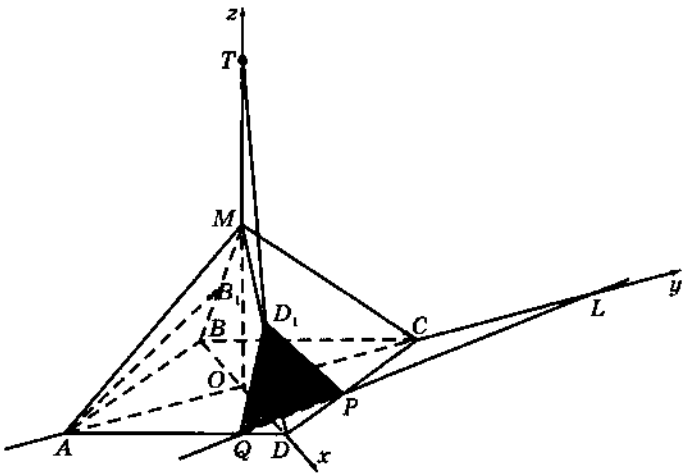
В этой системе координат имеем: $O(0;\ 0;\ 0)$, $D(1;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 1;\ 0)$ и $M(0;\ 0;\ 1)$.

Составим уравнение плоскости α, для чего найдем координаты точки P и координаты какого-нибудь нормального вектора $\vec{n}$ этой плоскости.

Получаем

$$P\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right),\ B(-1;\ 0;\ 0),\ B_1\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right),\ A(0;\ -1;\ 0),\ \overrightarrow{AB_1}\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{MC}(0;\ 1;\ -1).$$



Если вектор $\vec{n}(n_1;\ n_2;\ n_3)$ какой-нибудь нормальный вектор плоскости α, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен по крайней мере двум векторам, коллинеарным плоскости α, но не коллинеарным между собой.

Например, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{MC}$. Тогда $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MC} = 0, \end{cases}$ или в координатах:

$$\begin{cases} n_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot \frac{1}{2} = 0, \\ n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot (-1) = 0, \end{cases}$$

$$\text{т. е. } \begin{cases} n_1 - 2n_2 - n_3 = 0, \\ n_2 - n_3 = 0, \end{cases}$$

откуда с точностью до множителя пропорциональности находим $n_1 = 3$, $n_2 = n_3 = 1$. Таким образом, $\vec{n}(3;\ 1;\ 1)$.

Итак, в заданной системе координат получаем следующее уравнение плоскости α:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 3 + \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + (z - 0) \cdot 1 = 0,$$

или после упрощений

$$3x + y + z - 2 = 0. \qquad (3)$$

Построим теперь сечение пирамиды плоскостью α, заданной уравнением (3).

Если плоскость α пересекает ось Ox в некоторой точке K, то $K(k;\ 0;\ 0)$. Подставив координаты точки K в уравнение (3), находим, что $k = \frac{2}{3}$. Таким образом, $K\left(\frac{2}{3};\ 0;\ 0\right)$. Построим точку K по ее координатам.

Если далее плоскость α пересекает ось Oy в точке L, то $L(0;\ l;\ 0)$. Подставив координаты точки L в уравнение (3), находим, что $l = 2$. Таким образом, $L(0;\ 2;\ 0)$. Построим точку L по ее координатам.

Аналогично находим, что если плоскость α пересекает ось Oz в некоторой точке T, то $T(0;\ 0;\ t)$ и $t = 2$. Таким образом, $T(0;\ 0;\ 2)$. Построим точку T по ее координатам.

Имея точки K, L, T(и P), принадлежащие плоскости α, построим сечение пирамиды этой плоскостью. В итоге получаем треугольник D_1PQ — искомое сечение ($Q = PL \cap AD$, $D_1 = KT \cap MD$).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ